

# EL MODELO DE ROMER

ENRIC MARTORELL

CUNEF

CRECIMIENTO ECONÓMICO

2024-2025

## CRECIMIENTO DE LA PRODUCTIVIDAD

- ▶ La productividad es central para el PIB per cápita en el modelo de Solow:
  - La tasa de crecimiento,  $g_A$ , determina la tasa de crecimiento a largo plazo
  - El nivel de productividad,  $A_0$ , es importante para el nivel de PIB per cápita
- ▶ Comprender qué impulsa el crecimiento de la productividad es así central para entender el crecimiento económico

## MODELO DE CRECIMIENTO DE ROMER

- ▶ Queremos un modelo de crecimiento que:
  - Tenga todos los elementos del modelo de Solow
  - Sea específico sobre lo que significa  $A_t$  en ese modelo
  - Explique la dinámica de  $A_t$  y  $g_A$
  - Explique por qué  $g_A$  es constante a lo largo de un BGP
  - Requiera esfuerzo para crear las nuevas ideas que impulsan  $A_t$  y  $g_A$
  - Explique la elección involucrada en hacer ese esfuerzo
- ▶ Romer, P. M. (1990). **Endogenous Technological Change**. *Journal of Political Economy*, 98(5, Part 2):S71–S102

# CRECIMIENTO EN EL MODELO DE ROMER

## LA PARTE DE SOLOW

- Gran parte del modelo comienza con elementos familiares. La producción es

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_{Yt})^{1-\alpha} \quad (1)$$

donde  $L_{Yt}$  son los trabajadores empleados en producir bienes y servicios.  
 $L_{Rt}$  son personas dedicadas a I+D produciendo ideas, y

$$L_t = L_{Yt} + L_{Rt} \quad (2)$$

denotando la proporción de trabajadores de I+D como  $s_R = \frac{L_{Rt}}{L_t}$

- Por el momento vamos a tomar  $s_R$  como exógeno

## LA PARTE DE SOLOW

- ▶ Partes estándar:
  - El capital se acumula de la misma manera que en Solow (depende de  $K/AL$ )
  - El crecimiento de la población es el mismo que en Solow (exógeno a  $g_L$ )
- ▶ Asumiendo que  $g_A$  termina siendo constante (lo cual veremos), entonces la economía termina en un estado estacionario con una proporción  $K/AL$  constante como en Solow.

## AÑADIENDO IDEAS

- La parte relevante de este modelo de Romer es la acumulación de ideas. Comenzamos con la mecánica pura.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \theta L_{Rt}^{\lambda} A_t^{\phi} \quad (3)$$

- El cambio en ideas (= productividad),  $\partial A / \partial t$ , depende de
  - $\theta$ . Un parámetro que gobierna qué tan rápido se acumulan las ideas
  - $L_{Rt}$ , el número de trabajadores de I+D. Más investigadores, más ideas se encuentran
  - $A_t$ , el stock existente de ideas. Esto podría hacer que las nuevas ideas sean más fáciles o más difíciles de encontrar.

## AÑADIENDO IDEAS

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \theta L_{Rt}^{\lambda} A_t^{\phi} \quad (4)$$

► Dos parámetros fundamentales:

- $0 < \lambda < 1$  mide cuán sensible es  $\frac{\partial A}{\partial t}$  a  $L_{Rt}$ .
- Si  $\lambda$  está cerca de cero, entonces los investigadores se "aglomeran"
- $-\infty < \phi < 1$  mide el efecto de la productividad en la acumulación de ideas
- Si  $0 < \phi < 1$  mayor productividad hace más fáciles las nuevas ideas (por ejemplo, IA)
- Si  $\phi < 0$  mayor productividad hace más difíciles las nuevas ideas (por ejemplo, el cálculo es más difícil que la rueda)



## TASA DE CRECIMIENTO DE IDEAS

- Para obtener la tasa de crecimiento, dividimos ambos lados por  $A$

$$g_A = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{1}{A_t} = \theta \left( \frac{L_t}{L_t} L_{Rt} \right)^\lambda A_t^{\phi-1} = \theta s_R^\lambda \frac{L_t^\lambda}{A_t^{1-\phi}} \quad (5)$$

La tasa de crecimiento,  $g_A$ , depende de un ratio

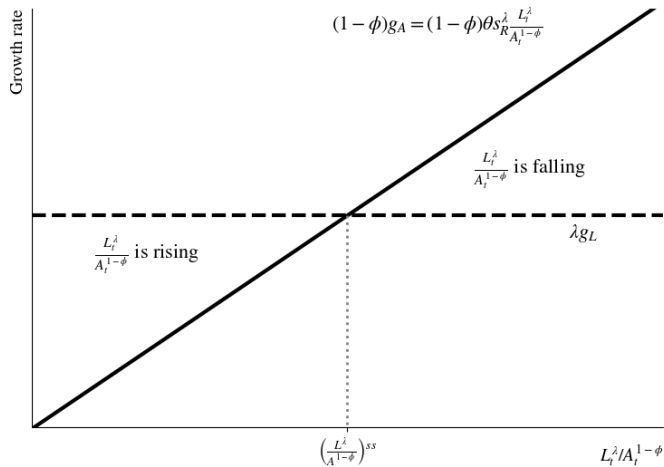
- $L_t^\lambda / A_t^{1-\phi}$  de "trabajadores por idea"
- $g_A$  es mayor cuanto más grande es este ratio
- Como el crecimiento del capital, el crecimiento de la productividad depende negativamente del nivel de productividad
- Analizar la dinámica a través de cómo  $g_A$  responde al ratio

## TASA DE CRECIMIENTO DE IDEAS

$$g_A = \theta s_R^\lambda \frac{L_t^\lambda}{A_t^{1-\phi}} \quad (6)$$

- Queremos graficar la tasa de crecimiento de ambas partes del ratio:
  - La tasa de crecimiento del numerador es  $\lambda g_L \rightarrow$  Exógeno
  - La tasa de crecimiento del denominador es  $(1 - \phi)g_A$ 
    - Endógena, depende de la ratio  $L_t^\lambda / A_t^{1-\phi}$
- Como hizimos con el modelo de Solow, ilustraremos la tasa de crecimiento del numerador y denominador contra el ratio

## DINÁMICA DE LA PRODUCTIVIDAD



► Probar ejercicios de comparativa estática [aquí](#)

## ESTADO ESTACIONARIO Y SENDA DE CRECIMIENTO EQUILIBRADO (BGP)

- No importa cuál sea el ratio inicial  $L_0^\lambda/A_0^{1-\phi}$ , la dinámica
  - Empuja el ratio hacia un estado estacionario donde las curvas se cruzan
  - Esto sucede porque  $g_A$  sube con el ratio, pero  $g_L$  se mantiene constante
  - En ese estado estacionario  $(1 - \phi)g_A = \lambda g_L$
  - Como con el capital, la tasa de crecimiento de variables endógeno depende de la tasa de crecimiento de variables exógenas

### Tasa de crecimiento de la productividad a largo plazo

$$g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1 - \phi} g_L \quad (7)$$

## CRECIMIENTO DE LA PRODUCTIVIDAD A LARGO PLAZO

$$g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1 - \phi} g_L \quad (8)$$

- ▶ La tasa de crecimiento de la productividad depende de la *tasa de crecimiento* de la población. La no rivalidad de las ideas elimina la dilución del crecimiento de la población
- ▶ Qué *no* influye en la tasa de crecimiento:
  - Intensidad de I+D,  $s_R$
  - El tamaño de la fuerza laboral,  $L_t$
  - El nivel de PIB per cápita  $y_t$

## NIVELES A LARGO PLAZO

- Recordemos nuestra expresión para el PIBpc en la senda de crecimiento equilibrado de Solow

$$y_t^{BGP} = A_t(k^{BGP})^\alpha \quad (9)$$

mientras que  $k^{BGP}$  es constante,  $A_t$  es determinístico dado  $g_A^{BGP}$  y  $A_0$ .

- Sin embargo en el modelo de Romer  $A_t$  ya no es determinístico, sino que sigue una dinámica dada por (5)

## NIVEL DE LA PRODUCTIVIDAD A LARGO PLAZO

- Usando la definición de  $g_A$  en (6) nos permite obtener el nivel de productividad en la senda de crecimiento equilibrado

$$A_t = \left( \theta s_R^\lambda \frac{L_t^\lambda}{g_A^{BGP}} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} \quad (10)$$

y por tanto el PIBpc en la senda de crecimiento equilibrado en el modelo de Romer es

$$y_t^{BGP} = (k^{SS})^\alpha (1 - s_R)^{1-\alpha} \left( \theta s_R^\lambda \frac{L_t^\lambda}{g_A^{BGP}} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} \quad (11)$$

## NIVEL DE LA PRODUCTIVIDAD A LARGO PLAZO

$$y_t^{BGP} = \underbrace{(k^{SS})^\alpha}_{\text{Solow}(+)} \underbrace{(1 - s_R)^{1-\alpha}}_{(-)} \underbrace{\left( \frac{\theta s_R}{g_A^{BGP}} \right)^{\frac{1}{1-\phi}}}_{(+)} \underbrace{L_t^{\frac{\lambda}{1-\phi}}}_{(+)} \quad (12)$$

- ▶ El primer término es el mismo que en Solow
- ▶ El segundo término expresa el lado negativo de invertir en investigadores, tenemos menos trabajadores para producir
- ▶ El tercer término es el efecto positivo del uso de investigadores en el nivel de productividad
- ▶ El último término nos dice que **una economía con más población es una economía más rica**



# LA ELECCIÓN DE I+D

## LA ELECCIÓN DE I+D

- ▶ Todos los resultados a largo plazo se mantienen independientemente de la elección de  $s_R$ .
- ▶ Pero  $s_R$  determina el nivel de productividad ( $A_t$ ) y por tanto el PIB per cápita ( $y_t$ )
- ▶ ¿Qué determina  $s_R$ ?
  - ¿Cómo toman las empresas la decisión de invertir en I+D?
    - Coste fijo versus flujo de beneficios
  - ¿Qué determina el coste fijo?
  - ¿Qué determina el flujo de beneficios?
- ▶ Esto requiere una descripción explícita de como funciona la estructura del mercado

## EL COSTE DE I+D

- Para una empresa potencial, el costo fijo de encontrar una nueva idea para implementar es

$$F_t = w_t \frac{L_{Rt}}{\partial A / \partial t} \quad (13)$$

- $w_t$  es el salario que tienen que pagar a las personas para hacer I+D
- $\frac{L_{Rt}}{\partial A / \partial t}$  es cuántos trabajadores se necesitan *por una idea extra*
- Las empresas potenciales toman esta proporción como dada, determinada de manera agregada
- Por lo tanto  $F_t$  es salarios/trabajador por trabajadores/idea = salarios/idea

## EL BENEFICIO DE I+D

- Para una empresa potencial, si tienen una idea pueden ganar un cierto flujo de beneficios cada período. Les importa el valor presente descontado de esos beneficios,  $V$ , y lo compararán con  $F$ .

$$V_0 = \pi_0 + \frac{\pi_0(1 + g_\pi)}{1 + r} + \frac{\pi_0(1 + g_\pi)^2}{(1 + r)^2} + \frac{\pi_0(1 + g_\pi)^3}{(1 + r)^3} + \dots$$

donde  $\pi_0$  son los beneficios de hoy,  $r$  es la tasa de retorno, y la tasa de crecimiento de los beneficios,  $g_\pi$ .

$$V_0 = \pi_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1 + g_\pi}{1 + r} \right)^t$$

## EL BENEFICIO DE I+D

- Se resuelve como

$$V_0 = \frac{\pi_0}{r - g_\pi} \quad (14)$$

- Una idea es más valiosa:

- Si los beneficios iniciales son grandes - vincular esto con el poder de mercado
- Si  $r$  es bajo →  $r$  es la tasa de descuento del futuro y/o retorno de activos alternativos
- $g_\pi$  es alto - vincular esto con el crecimiento de la economía

## LAS DECISIONES DE LAS EMPRESAS (INNOVADORAS)

- ▶ Tenemos muchas empresas potenciales, y mientras  $V_0 > F$  continuarán haciendo I+D. Asumimos que entran a competir hasta que  $V_0 = F$

$$\frac{\pi_0}{r - g_\pi} = w_t \frac{L_{Rt}}{\partial A / \partial t}$$

- ▶ Finalmente queremos resolver esto para  $s_R$ , que recordemos es  $L_{Rt} = s_R L_t$ , así que realmente estamos resolviendo para  $L_{Rt}$ . Pero necesitamos
  - Beneficios iniciales
  - Tasa de crecimiento de los beneficios
  - Salario

# ESTRUCTURA DE MERCADO

## VISIÓN GENERAL

- ▶ La estructura general de esta economía es más compleja que Solow
  - En la "cima" hay un conjunto de empresas de bienes finales (por ejemplo, El Corte Inglés)
    - Almacenan bienes intermedios que los consumidores compran (por ejemplo, Coca-Cola, cepillos de dientes, camisetas)
    - Son competitivas (sin beneficios)
    - Usan trabajadores productivos  $L_Y$  (no investigan)
    - A las empresas de bienes finales les gusta almacenar una variedad de bienes
  - Las empresas de bienes intermedios suministran los bienes individuales a las empresas de bienes finales



## VISIÓN GENERAL

- ▶ La estructura general de esta economía es más compleja que Solow
  - En la "cima" hay un conjunto de empresas de bienes finales (por ejemplo, El Corte Inglés)
  - Las empresas de bienes intermedios suministran los bienes individuales a las empresas de bienes finales (por ejemplo, Coca-Cola, Oral-B, Levi's)
    - Las empresas intermedias son monopolistas (por ejemplo, solo Coca-Cola puede vender Coca-Cola) y obtienen beneficios
    - Utilizan capital y deciden si pagar el coste de I+D (requieren investigadores  $L_R$ )
    - Una nueva idea representa una nueva variedad de bien intermedio que puede obtener esos beneficios

## EMPRESAS DE BIENES FINALES

- ▶ Las empresas de bienes finales producen PIB usando

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \sum_{j=1}^J x_j^\alpha$$

- $L_Y$  son trabajadores de producción (no investigadores) que cobran  $w$
- $x_j$  es la cantidad de cada producto intermedio que distribuyen y que compran a productores intermedios a un precio  $p_j$
- $J$  es el *número* de productos que gestionan
- $\alpha$  captura cuánto les gusta la variedad
- ▶  $Y$  es PIB porque las ventas de bienes intermedios a la empresa de bienes finales no se contabilizan explícitamente en el PIB

## MAXIMIZACIÓN DE BIENES FINALES

- Asumimos que las empresas de bienes finales maximizan beneficios. Son competitivas, por lo que los beneficios terminan en cero, pero aún lo intentan. Para hacerlo, establecen el producto marginal igual al costo marginal. Para trabajo:

$$w = (1 - \alpha) \frac{Y}{L_Y} \quad (15)$$

y para un producto individual  $j$

$$p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1} \quad (16)$$

esta es la ecuación de una curva de demanda para el producto  $j$ . Cuanto más alto  $p_j$ , menor la demanda.

## EMPRESAS DE BIENES INTERMEDIOS

- Cada empresa intermedia produce su bien usando la función  $x_j = K_j$ , usando solo capital, que cuesta  $r$  por unidad de capital. Sus beneficios son:

$$\pi_j = p_j x_j - r x_j$$

- Son monopolistas, por lo que saben cómo  $p_j$  responde a su elección de  $x_j$ . Es decir, conocen cómo es la curva de demanda de las empresas de bienes finales y establecen el ingreso marginal igual al coste marginal

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} x = r$$

## EMPRESAS DE BIENES INTERMEDIOS

- Sabemos que los monopolistas igual ingreso marginal al coste marginal

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} x = r \Leftrightarrow 1 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{x}{p} = \frac{r}{p}$$

→  $\frac{\partial p}{\partial x} \frac{x}{p}$  es la elasticidad del precio con respecto a la cantidad, que para las empresas de bienes finales es igual a  $\alpha - 1$

- Por lo tanto

$$1 + (\alpha - 1) = \frac{r}{p}$$

## EMPRESAS DE BIENES INTERMEDIOS

- ▶ Finalmente obtenemos

$$p = \frac{1}{\alpha} r \quad (17)$$

- ▶ Esto representa la existencia de un *mark-up* del precio sobre el costo marginal. Si  $\alpha$  se acerca a uno, la empresa de bienes finales no se preocupa por la variedad, y el markup es más bajo (y viceversa).
- ▶ Este poder de mercado es lo que impulsará los beneficios y hará que innovar para crear un nuevo bien intermedio valga la pena. Esto coincide con la intuición vista anteriormente de que la innovación depende de cobrar un precio más alto que el costo marginal.

## AGREGANDO DECISIONES "MICRO" PARA OBTENER RESULTADOS "MACRO"

- ▶ Dados los resultados "micro" de las empresas de bienes finales e intermedias.
  - Cada empresa intermedia tiene una tecnología idéntica, por lo que  $p_j = r/\alpha$
  - Como son idénticas, demandan cantidades idénticas de capital,  $x_j = K/A$
- ▶ Así las empresas de bienes finales producen

$$Y = L_Y^{1-\alpha} A x^\alpha = A \left( \frac{K}{A} \right)^\alpha = K^\alpha (A L_Y)^{1-\alpha} \quad (18)$$

- ▶ A pesar de la complejidad, el PIB tiene la misma formula que en Solow

## SALARIOS Y BENEFICIOS

- ▶ Resolver lo que necesitamos saber. Comenzar con el salario. Dada la condición de primer orden de las empresas de bienes finales:

$$w_t L_{Y_t} = (1 - \alpha) Y_t$$

- ▶  $(1 - \alpha)$  del PIB se gasta en trabajadores. El otro  $\alpha$  debe gastarse en bienes intermedios (las empresas de bienes finales no tienen beneficios)
- ▶ Los ingresos de cualquier empresa intermedia son así

$$p_j x_j = \frac{\alpha Y_t}{A_t} \tag{19}$$



## BENEFICIOS POR EMPRESA

- ¿Cuáles son los beneficios para una empresa?

$$\begin{aligned}\pi_t &= p_t x_t - r_t x_t \\ &= (p_t - \alpha p_t) x_t \\ &= (1 - \alpha) p_t x_t\end{aligned}$$

y sustituir los ingresos de la empresa  $p_j x_j = \frac{\alpha Y_t}{A_t}$

$$\pi_t = (1 - \alpha) \alpha \frac{Y_t}{A_t} \quad (20)$$

- Estos son los beneficios iniciales que entran en la valoración de una idea

## TASA DE CRECIMIENTO DE BENEFICIOS

- ¿Qué tan rápido crecen los beneficios? Los beneficios son

$$\pi_t = (1 - \alpha)\alpha \frac{Y_t}{A_t} \quad (21)$$

así que los beneficios crecen a la tasa (a lo largo de una senda de crecimiento equilibrado - BGP) de  $g_{\pi}^{BGP} = g_Y^{BGP} - g_A^{BGP}$  pero sabemos que  $g_Y^{BGP} = g_L^{BGP} + g_A^{BGP}$  así que

$$g_{\pi}^{BGP} = g_L^{BGP} \quad (22)$$

- **Los beneficios crecen tan rápido como crece la población (o el potencial mercado)**

## RESOLVIENDO PARA $s_R$

- Tenemos todas las piezas para volver a esta condición para la innovación:

$$\frac{\pi_t}{r - g_\pi} = w_t \frac{L_{Rt}}{\partial A / \partial t}$$

tal que

$$\frac{\alpha(1 - \alpha) \frac{Y_t}{A_t}}{r - g_L} = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_{Yt}} \frac{L_{Rt}}{g_A A_t}$$

"aislamos"  $s_R$

$$\frac{s_R}{1 - s_R} = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)} \frac{g_A}{r - g_L} \quad (23)$$

## RESOLVIENDO PARA $s_R$

$$\frac{s_R}{1 - s_R} = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)} \frac{g_A}{r - g_L} \quad (24)$$

► Dada la solución (24),  $s_R$  es mayor:

- Si  $g_A$  es mayor → Si las innovaciones llegan rápidamente, compensa contratar trabajadores de I+D
- Si  $r$  es menor → Si el futuro importa más, compensa hacer I+D
- Si  $g_L$  es mayor → Si el mercado crecerá rápidamente, paga hacer I+D
- Si  $\alpha(1 - \alpha)$  (beneficios como proporción del PIB) es mayor
- Si  $(1 - \alpha)$  (salarios como proporción del PIB) es menor

# CONCLUSIÓN

## PRINCIPALES IDEAS TÉCNICAS DEL MODELO DE ROMER

- ▶ Podemos tener dos niveles de producción en la economía (productores finales y productores intermedios) y mantener una función de producción agregada de producción agregada consistente con Solow y una senda de crecimiento equilibrado
- ▶ Mediante la competencia imperfecta, las empresas intermedias pueden obtener beneficios y el retorno del insumo rival capital no es igual a su producto marginal
- ▶ Una interpretación clara de lo que significa innovación: número de nuevos productos ideados que se usan en la producción
- ▶ Los beneficios obtenidos por las empresas intermedias proveen el incentivo para invertir en investigadores (determinan  $s_R$ )

## ¿QUÉ HEMOS APRENDIDO? VERSIÓN MEME

PRODUCTIVITY  
GROWTH  
DRIVES LONG-RUN  
ECONOMIC GROWTH



PRODUCTIVITY  
GROWTH  
DEPENDS ON NEW IDEAS



MORE  
PEOPLE,  
MORE IDEAS



LONG-RUN  
ECONOMIC GROWTH  
DEPENDS ON  
POPULATION GROWTH



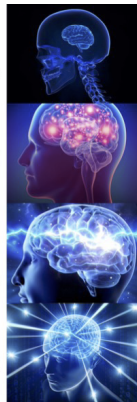
## ¿QUÉ HEMOS APRENDIDO? VERSIÓN MEME

Ideas are a  
fixed cost for firms

Therefore, firms  
must have increasing  
returns to scale

Firms with increasing  
returns lose money  
under perfect competition

Economic growth  
depends on \*imperfect\*  
competition so firms will  
pay fixed costs for ideas







Romer, P. M. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, 98(5, Part 2):S71–S102.