Ejercicios de Crecimiento Económico

CUNEF

Curso 2024-2025

Leer atentamente los enunciados.

1. Considera el modelo de Solow estudiado en clase dónde el PIB viene dado por la función de producción $Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$, donde K_t es el capital, L_t son trabajadores[1], A_t es el nivel de tecnología y α el peso del capital en la producción. El capital se acumula de acuerdo con $\partial K/\partial t = I - \delta K$ donde la inversión (I) es una fracción (s_I) exógena del PIB, $I = s_I Y$, y δ es la tasa de depreciación del capital. La tecnología crece a una tasa exógena g_A y la población a una tasa exógena g_L.

   (a) Identifica los parámetros y las variables endógenas y exógenas del modelo.

   Solución: Parámetros: α, s_I, δ, g_A, g_L. Variables endógenas: Y_t, K_t. Variables exógenas: L_t, A_t.

   Las variables endógenas son aquellas que se determinan dentro del modelo porque su evolución implica dependencia con otras variables endógenas del modelo (por ejemplo, la evolución del capital K_t depende de Y_t, que a su vez depende de K_t). Las variables exógenas son aquellas que aunque tienen una dinámica dentro del modelo, esta dinámica viene determinada por factores exógenos al modelo (por ejemplo, la población L_t cambia, pero cómo lo hace viene dado de forma exógena). Los parámetros son elementos constantes que nos vienen dados de fuera del modelo (por ejemplo, la tasa de crecimiento de la población g_L).

   (b) Obtén la expresión para el PICpc ($y_t = Y_t/L_t$) como función del capital eficiente por trabajador ($k_t = K_t/A_t L_t$).

   Solución:
$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}}{L_t} = A_t \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^\alpha = A_t k_t^\alpha \tag{1}$$

   (c) Obtén la expresión para la tasa de crecimiento del PIBpc (g_y).

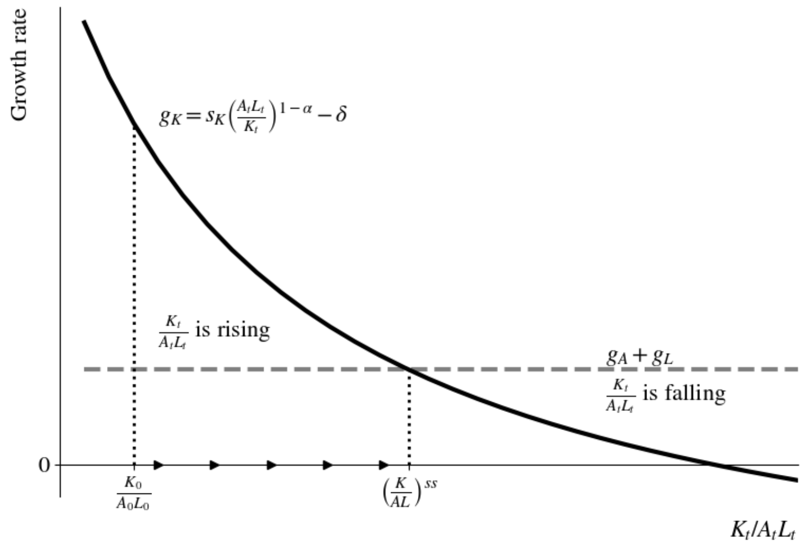
   Solución: Tomando logaritmos en la definición $y_t = A_t k_t^\alpha$ y derivando obtenemos $g_A + \alpha(g_K - g_A - g_L)$. Paso a paso en las slides de Solow.

   (d) Obtén la expresión para la tasa de crecimiento del capital (g_K) como función del capital eficiente por trabajador ($k_t = K_t/A_t L_t$).

   Solución:
$$g_K = \frac{\partial K_t}{\partial t}\frac{1}{K} = s\frac{Y_t}{K_t} - \delta = s\frac{K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}}{K_t} - \delta \tag{2}$$
$$= s\left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} - \delta = s\left(\frac{1}{k_t}\right)^{1-\alpha} - \delta \tag{3}$$

[1] Asumimos que toda la población trabaja y por tanto el número de trabajadores es igual al total de la población.

(e) Dibuja el gráfico de la dinámica del capital eficiente por trabajador ($k_t = K_t/A_tL_t$) visto en clase. Asume que una economía tiene un nivel k_0 tal que $g_K > g_A + g_L$. ¿Cómo evoluciona la ratio a lo largo del tiempo? Justifica tu respuesta.



Solución: Si el nivel k_0 es tal que $g_K > g_A + g_L$, el capital físico está creciendo más rápido que la tecnología y la población. Por tanto, el numerador del capital eficiente por trabajador crece más rápido que el denominador, haciendo que este aumente a lo largo del tiempo hasta alcanzar el nivel estacionario.

(f) ¿Qué ocurre con la ratio de capital eficiente por trabajador en el largo plazo? Obtén la expresión para el capital eficiente por trabajador en el estadio estacionario.

Solución: En el gráfico observamos que cuando la economía se encuentra en su nivel estacionario, la tasa de crecimiento del capital es igual a la tasa de crecimiento de la población más la de la tecnología. Lo que implica que el numerador y el denominador de la ratio de capital eficiente por trabajador crecen al mismo ritmo. Por tanto, la ratio de capital eficiente por trabajador se mantiene constante en el estado estacionario y podemos obtener su nivel igualando la tasa de crecimiento del capital a la tasa de crecimiento de la población más la de la tecnología:

$$s\left(\frac{1}{k^{SS}}\right)^{1-\alpha} - \delta = g_A + g_L \quad \Leftrightarrow \quad k^{SS} = \left(\frac{s}{g_A + g_L + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{4}$$

(g) ¿Qué determina el crecimiento del PIBpc en el estadio estacionario? ¿Qué determina el crecimiento del PIB total en el estadio estacionario? Argumenta a que se debe la diferencia entre ambos teniendo en cuenta las propiedades de la función de producción y explica la relevancia para la política económica de este resultado.

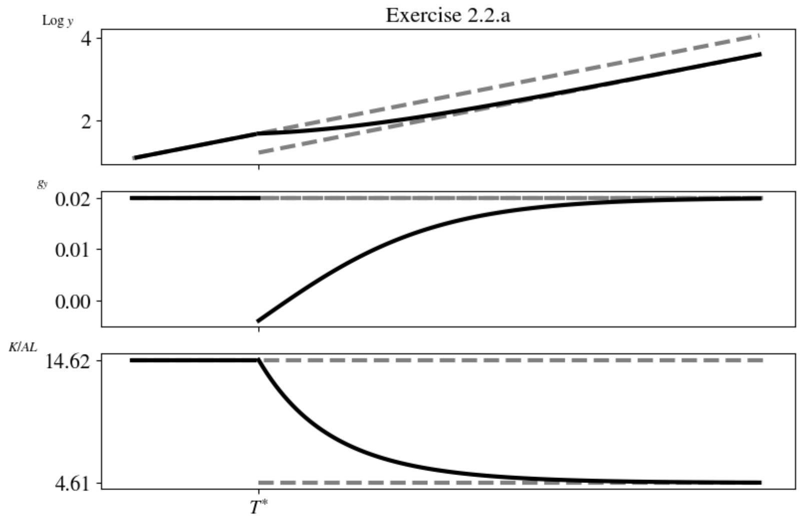
Solución: El crecimiento del PIBpc en el estado estacionario viene dado por la tasa de crecimiento de la tecnología g_A, ya que el capital eficiente por trabajador se mantiene constante. Por otro lado, el PIB total crece a una tasa $g_A + g_L$, ya que el capital físico y la población crecen a esa tasa. Esto implica que para aumentar el PIBpc es necesario aumentar la productividad (tecnología) y no simplemente aumentar la población. Este resultado en Solow es relevante para la política económica, ya que sugiere que las políticas deben centrarse en fomentar la innovación y el desarrollo tecnológico para mejorar el bienestar de los ciudadanos.

(h) Explica el concepto de crecimiento de transición en el modelo de Solow. ¿Qué determina la velocidad de convergencia hacia el estadio estacionario?

Solución: El crecimiento de transición en el modelo de Solow hace referencia al crecimiento de las variables fuera del estado estacionario y viene representado por la expresión $\alpha(g_K - g_A - g_L)$. La velocidad de convergencia hacia el estado estacionario depende de la distancia al estado estacionario, cuanto más lejos estemos del punto en el que $g_K = g_A + g_L$, más rápido (de)crecerá la economía.

2. Asume que la economía está en la senda de crecimiento equilibrado del modelo de Solow con $g_A > 0$. Para cada uno de los siguientes escenarios, dibuja cualitativamente como evoluciona cada una de las siguientes variables: tasa de crecimiento del PIBpc (g_y), logaritmo del nivel de PIBpc $(\ln(y))$[2] y capital eficiente por trabajador ($k = K/AL$). En cada caso, justifica tu respuesta.

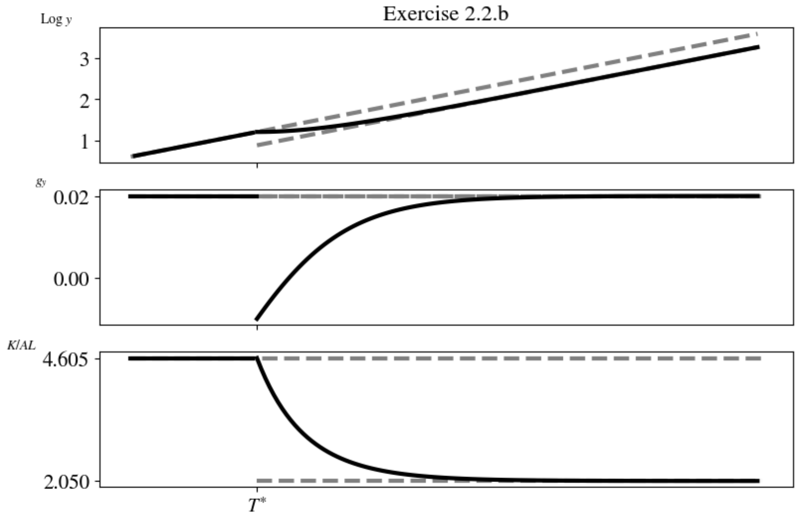
(a) La tasa de ahorro s_I decrece de forma permanente.



Solución: La curva de g_K se desplaza hacia abajo, lo que implica que un nuevo nivel de capital eficiente por trabajador en el estado estacionario que es menor al anterior. Durante la transición al nuevo nivel de capital eficiente por trabajador tenemos que $g_K < g_A + g_L$ y por lo tanto el término de crecimiento de transición en g_y es negativo, haciendo que esta tasa caiga. Sin embargo, en el largo plazo el capital eficiente por trabajador se estabiliza en su nuevo nivel y la tasa de crecimiento del PIBpc vuelve a su nivel de largo plazo igual a g_A. El logaritmo del PIBpc $(\ln(y))$ cuya pendiente venía siendo g_A (la pendiente de $\ln(y)$ es aproximadamente igual a g_y) se situará en una senda de crecimiento equilibrado más baja, ya que el nuevo k^{SS} es menor, pero su pendiente a largo plazo será la misma que anteriormente e igual a g_A.

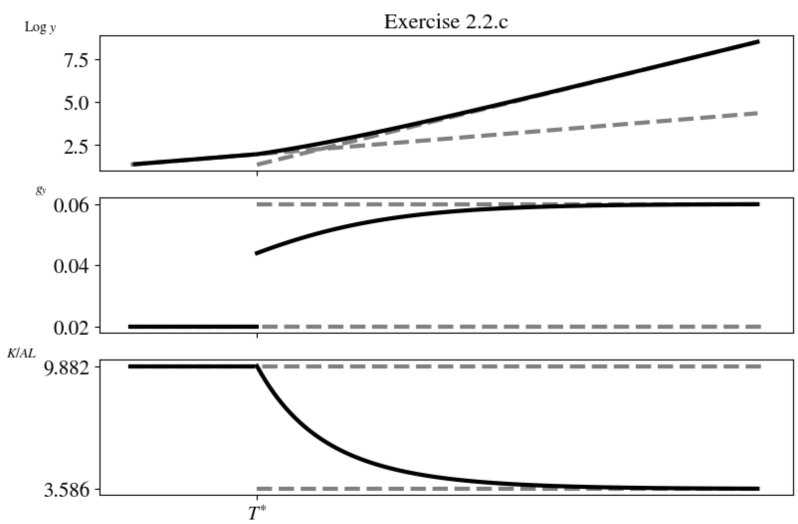
(b) La tasa de crecimiento de la población g_L incrementa de forma permanente.

[2] Recuerda que la pendiente del logaritmo de una variable es aproximadamente igual a la tasa de crecimiento de la misma.



Solución: La constante de $g_A + g_L$ se desplaza hacia arriba, lo que implica que un nuevo nivel de capital eficiente por trabajador en el estado estacionario que es menor al anterior. Durante la transición al nuevo nivel de capital eficiente por trabajador tenemos que $g_K < g_A + g_L$ y por lo tanto el término de crecimiento de transición en g_y es negativo, haciendo que esta tasa caiga. Sin embargo, a largo plazo el capital eficiente por trabajador se estabiliza en su nuevo nivel y la tasa de crecimiento del PIBpc vuelve a su nivel de largo plazo g_A. El logaritmo del PIBpc ($\ln(y)$) cuya pendiente venía siendo g_A (la pendiente de $\ln(y)$ es aproximadamente igual a g_y) se situará en una senda de crecimiento equilibrado más baja, ya que el nuevo k^{SS} es menor, pero su pendiente a largo plazo será la misma que anteriormente e igual a g_A.

(c) La tasa de crecimiento de la tecnología g_A incrementa de forma permanente.



Solución: Esta tiene un poco más de complejidad. La constante de $g_A + g_L$ se desplaza hacia arriba, lo que implica que un nuevo nivel de capital eficiente por trabajador en el estado estacionario que es menor al anterior. Durante la transición al nuevo nivel de capital eficiente por trabajador tenemos que $g_K < g_A + g_L$ y por lo tanto el término de crecimiento de transición en g_y es negativo. Sin embargo, el otro término g_A es ahora mayor. Dado que el término de crecimiento de transición está escalado por $0 < \alpha < 1$, podemos suponer que el incremento en g_A es mayor que la caída en $\alpha(g_K - g_A - g_L)$ y por lo tanto el crecimiento del PIBpc aumenta y en el largo plazo se estabiliza en el nuevo nivel de g_A. El logaritmo del PIBpc ($\ln(y)$) cuya pendiente era igual a g_A se situará en una senda de crecimiento con una pendiente más alta, ya que el nuevo g_A es mayor.

3. Considera el modelo de Romer estudiado en clase dónde el PIB viene dado por la función de producción $Y_t = K_t^\alpha (A_t L_{Yt})^{1-\alpha}$, donde K_t es el capital, L_{Yt} son trabajadores, A_t es el nivel de tecnología y α el peso del capital en la producción. El total de la población viene dado por el número de trabajadores más el número de investigadores $L_t = L_{Yt} + L_{Rt}$ y crece de forma exógena a una tasa g_L[3]. La tecnología se acumula de acuerdo con $\partial A/\partial t = \theta L_{Rt}^\lambda A_t^\phi$. El capital se acumula de la misma forma que en el modelo de Solow.

   (a) Identifica los parámetros y las variables endógenas y exógenas del modelo.

   Solución: Parámetros: α, θ, λ, ϕ, g_L. Variables endógenas: Y_t, K_t, A_t. Variables exógenas: L_{Yt}, L_{Rt}.

   (b) Obtén la expresión para el PIBpc ($y = Y_t/L_t$) como función del capital eficiente por trabajador ($k_t = K_t/A_tL_t$) y la ratio de investigadores ($s_R = L_{Rt}/L_t$).

   Solución: Nótese que la función de producción es parcialmente diferente a la del modelo de Solow, ya que el total de población L_t no es el mismo que el número de trabajadores que producen el PIB (L_{Yt}). Utilizando la definición de la ratio de investigadores $s_R = L_{Rt}/L_t$, podemos reescribir la función de producción como $Y_t = K^\alpha [A_t(1-s_R)L_t]^{1-\alpha}$

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{K^\alpha [A_t(1-s_R)L_t]^{1-\alpha}}{L_t} = K^\alpha A_t^{1-\alpha}(1-s_R)^{1-\alpha} L_t^{-\alpha} = A_t k_t^\alpha (1-s_R)^{1-\alpha} \quad (5)$$

   (c) Obtén la expresión para la tasa de crecimiento de la tecnología g_A como función de la ratio de población por unidad de tecnología ($L_t^\lambda / A_t^{1-\phi}$).

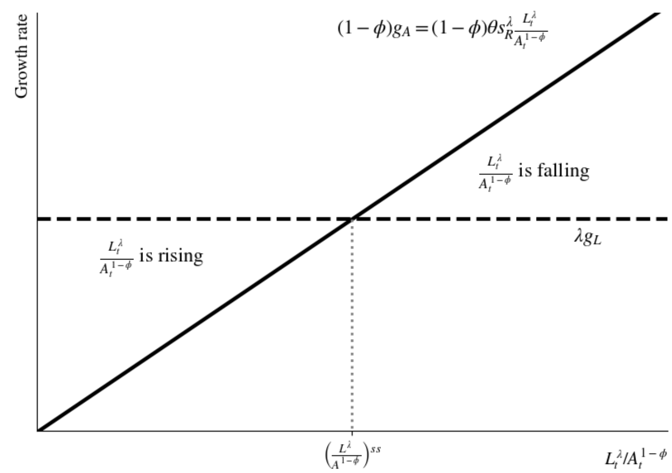
   Solución:

$$g_A = \frac{\partial A_t}{\partial t}\frac{1}{A_t} = \theta L_{Rt}^\lambda A_t^{\phi-1} = \theta L_{Rt}^\lambda \frac{L_t^\lambda}{L_t^\lambda} A_t^{\phi-1} = \theta s_R^\lambda \frac{L_t^\lambda}{A_t^{1-\phi}} \quad (6)$$

   (d) Dibuja el gráfico de la dinámica de la ratio de trabajadores por unidad de tecnología $L_t^\lambda/A_t^{1-\phi}$ visto en clase. Asume que una economía tiene una ratio $L_t^\lambda/A_t^{1-\phi}$ tal que $(1-\phi)g_A > \lambda g_L$. ¿Cómo evoluciona la ratio a lo largo del tiempo? Justifica tu respuesta.

   Solución: El gráfico representa la dinámica de la ratio de población por unidad de tecnología $L_t^\lambda/A_t^{1-\phi}$. Para ello queremos comparar como crece el numerador y el denominador de la ratio. El numerador crece a una tasa λg_L y el denominador a una tasa $(1-\phi)g_A$. Por lo tanto, si $(1-\phi)g_A > \lambda g_L$, el denominador crece más rápido que el numerador y la ratio de trabajadores por unidad de tecnología decrece a lo largo del tiempo. En el gráfico se observa que la ratio de trabajadores por unidad de tecnología converge al nivel estacionario $\left(L^\lambda/A^{1-\phi}\right)^{SS}$.

[3] Es útil definir la proporción de investigadores sobre el total de trabajadores $s_R = L_{Rt}/L_t$ que por ahora consideramos exógena.



(e) ¿Qué ocurre con la ratio de población por unidad de tecnología en el largo plazo? Deriva el nivel en el estadio estacionario.

Solución: La ratio de población por unidad de tecnología en el largo plazo se estabiliza en su nivel estacionario $\left(L^{\lambda}/A^{1-\phi}\right)^{SS}$. Para obtener este nivel, igualamos la tasa de crecimiento del numerador y el denominador:

$$\lambda g_L = (1-\phi)g_A = (1-\phi)\theta s_R^{\lambda}\frac{L_t^{\lambda}}{A_t^{1-\phi}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{L^{\lambda}}{A^{1-\phi}}\right)^{SS} = \frac{\lambda g_L}{(1-\phi)\theta s_R^{\lambda}} \tag{7}$$

(f) ¿Qué determina el crecimiento del PIBpc en el estadio estacionario? Argumenta la relevancia para la política económica de este resultado.

Solución: Si derivamos g_y a partir de la expresión del PIBpc $y_t = A_t k_t^{\alpha}(1-s_R)^{1-\alpha}$, obtenemos que la tasa de crecimiento del PIBpc es la misma que en el modelo de Solow. Nótese que el término $(1-s_R)^{1-\alpha}$ es constante y por tanto desaparece al derivar cuando buscamos la tasa de crecimiento. Por lo tanto, en el estado estacionario el PIBpc viene determinado por la tasa de crecimiento de la tecnología g_A. En el modelo de Romer, esta tasa de crecimiento de la tecnología es endógena. Podemos obtener su valor en el estado estacionario igualando las tasas de crecimiento del numerador y del denominador de la ratio de población por unidad de tecnología. $g_A = \frac{\lambda}{1-\phi}g_L$. Aunque g_A es endógeno en el corto plazo, en el largo plazo acaba dependiendo exclusivamente de parámetros exógenos, en particular la tasa de crecimiento de la población. La idea es que para mantener un crecimiento sostenido de la tecnología en el largo plazo se necesita un crecimiento sostenido de investigadores que producen nuevas ideas no rivales.

Es interesante comparar este resultado con el efecto del crecimiento de la población en el modelo de Solow. Allí, una tasa de crecimiento de la población más alta reduce el nivel de PIBpc a lo largo de una senda de crecimiento equilibrado. Un crecimiento más rápido de la población permite acumular más capital porque hay más trabajadores disponibles para construir bienes de capital. Pero como el capital es un bien rival y tiene rendimientos decrecientes, la acumulación de capital no puede "mantenerse al día" con un crecimiento más rápido de la población.

4. En el ejercicio anterior tomamos la proporción de investigadores sobre el total de trabajadores $s_R = L_{Rt}/L_t$ como exógena. Sin embargo, en clase hemos visto que esta viene determinada por las decisiones de inversión en "ideas" de las empresas

(a) Explica a que decisión se enfrentan las empresas a la hora de decidir invertir en ideas.

(b) ¿Qué factores determinan los costes de esa inversión?

(c) ¿Qué factores determinan el valor de esa inversión?

(d) Argumenta que factores de la estructura del mercado así como institucionales favorecen la inversión en ideas por parte de las empresas.

5. El crecimiento endógeno de la tecnología es un mecanismo clave del modelo de Romer. Este crecimiento de la tecnología se basa en la creación de nuevas ideas. Sin embargo, no todos los países tienen la misma capacidad de crear ideas.

   (a) Explica el concepto de difusión de ideas y su importancia para el crecimiento económico de ciertos países.

   (b) ¿De qué variables depende la capacidad de un país *seguidor* de adoptar ideas de un país *líder*? ¿Qué factores determinan la velocidad de adopción de ideas?

   (c) Argumenta un fenómeno demográfico que puede influir en la difusión de ideas.

   (d) Argumenta un fenómeno institucional pueden influir en la difusión de ideas.