HOJA DE PROBLEMAS 5 — SOLUCIONES

Capital Humano y Difusión Tecnológica

Crecimiento Económico
CUNEF

1 Función de producción con capital humano

$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t h_t L_t)^{1-\alpha}$, $h_t = e^{\mu E_t}$.
Valores: $\mu = 0.10$, $\alpha = 1/3$.

(a) Interpretación de μ y forma exponencial.

Solución:

Interpretación: μ es la *semielasticidad* de h respecto a los años de educación. Tomando logaritmos en $h = e^{\mu E}$:

$$\ln h = \mu\, E \quad \Longrightarrow \quad \frac{d \ln h}{dE} = \mu$$

Por tanto, un año adicional de educación aumenta el capital humano (y, vía mercados de trabajo competitivos, los salarios) aproximadamente un $100\mu\% = 10\%$.

Por qué exponencial: La especificación $h = e^{\mu E}$ implica rendimientos constantes en *tasa* (cada año extra añade el mismo porcentaje), no en *nivel*. Esto es coherente con la evidencia de Mincer (1974), donde regresiones de $\ln(w)$ sobre años de educación arrojan coeficientes estables alrededor de $\mu \approx 0.07$–0.10 en países muy distintos.

(b) Cálculo de h para $E = 4, 10, 16$.

Solución:

$$h(E=4) = e^{0.10\times 4} = e^{0.4} \approx 1.49$$
$$h(E=10) = e^{0.10\times 10} = e^{1.0} \approx 2.72$$
$$h(E=16) = e^{0.10\times 16} = e^{1.6} \approx 4.95$$

Interpretación: Un trabajador con educación primaria es 1.49 veces más productivo que uno sin escolarización; uno con secundaria, 2.72 veces; uno universitario, casi 5 veces. La progresión es *convexa*: cada tramo educativo añadido aporta un porcentaje fijo (10% por año), pero al acumular se traduce en saltos absolutos crecientes.

(c) Ratio Y_A/Y_B con $E_A = 4$, $E_B = 12$.

Solución:

Con el mismo K, A y L en ambos países, la única diferencia procede de h. Como h entra elevado a $1-\alpha$ en Y:

$$\frac{Y_A}{Y_B} = \left(\frac{h_A}{h_B}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{e^{0.4}}{e^{1.2}}\right)^{2/3} = e^{-0.8\times 2/3} = e^{-0.533}$$

$$\boxed{\frac{Y_A}{Y_B} \approx 0.587}$$

El País A produce solo el 58.7% de lo que produce el País B *únicamente por la diferencia en capital humano*, una brecha del orden del 41%. Esto sugiere que la educación es cuantitativamente relevante, aunque no suficiente para explicar las brechas observadas (que llegan a ratios de 1:30 entre países ricos y pobres).

(d) Salarios relativos.

Solución:

En equilibrio competitivo el salario es proporcional a la productividad marginal del trabajo, que escala con h. Si $w(E = 4) = 1$:

$$w(E = 10) = 1 \times \frac{h(10)}{h(4)} = e^{0.10\times(10-4)} = e^{0.6} \approx \boxed{1.82}$$
$$w(E = 16) = 1 \times \frac{h(16)}{h(4)} = e^{0.10\times(16-4)} = e^{1.2} \approx \boxed{3.32}$$

Es decir, un universitario gana 3.3 veces lo que gana un trabajador con sólo educación primaria. Estas magnitudes están en el rango (algo alto) de las primas salariales observadas en países desarrollados, lo que da credibilidad al valor calibrado $\mu \approx 0.10$.

2 Contabilidad del desarrollo (Hall–Jones)

Valores: $\alpha = 1/3$ (de modo que $\alpha/(1-\alpha) = 1/2$).

(a) Derivación de la descomposición.

Solución:

Partimos de $Y = K^\alpha (AhL)^{1-\alpha}$ y dividimos por L:

$$\frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha (Ah)^{1-\alpha}$$

Sustituimos $K/L = (K/Y)(Y/L)$:

$$\frac{Y}{L} = \left[\frac{K}{Y} \cdot \frac{Y}{L}\right]^{\alpha} (Ah)^{1-\alpha} = \left(\frac{K}{Y}\right)^{\alpha} \left(\frac{Y}{L}\right)^{\alpha} (Ah)^{1-\alpha}$$

Pasando $(Y/L)^{\alpha}$ al lado izquierdo:

$$\left(\frac{Y}{L}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{K}{Y}\right)^{\alpha} (Ah)^{1-\alpha}$$

Elevando a $1/(1-\alpha)$:

$$\frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A\,h$$

Multiplicando por L/N:

$$\boxed{y \equiv \frac{Y}{N} = \left(\frac{K}{Y}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A\,h\,\frac{L}{N}}$$

(b) Cálculo de $y_{\text{rezagado}}/y_{US}$.

Solución:

Sustituyendo en la ratio:

$$\frac{y_{\text{rez}}}{y_{US}} = \left(\frac{2.0}{3.0}\right)^{1/2} \times \frac{0.50}{1.00} \times \frac{0.70}{1.00} \times \frac{0.45}{0.50}$$

$$\begin{aligned}
&= (0.667)^{0.5} \times 0.50 \times 0.70 \times 0.90 \\
&= 0.816 \times 0.50 \times 0.70 \times 0.90 \\
&\approx \boxed{0.257}
\end{aligned}$$

El país rezagado tiene un PIB per cápita igual al 25.7% del estadounidense.

(c) Descomposición logarítmica.

Solución:

Tomando logaritmos:

$$\ln \frac{y_{\text{rez}}}{y_{US}} = \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{2}{3} + \ln(0.5) + \ln(0.7) + \ln(0.9)$$

$$\begin{aligned}
\ln \frac{y_{\text{rez}}}{y_{US}} &= 0.5 \times (-0.405) + (-0.693) + (-0.357) + (-0.105) \\
&= -0.203 + (-0.693) + (-0.357) + (-0.105) \\
&\approx -1.358
\end{aligned}$$

(Comprobación: $e^{-1.358} \approx 0.257$ ✓)

Contribución porcentual a la brecha:

Componente	Contribución (log)	% de la brecha
Capital-producto K/Y	-0.203	15%
Productividad A	-0.693	51%
Capital humano h	-0.357	26%
Trabajo / población L/N	-0.105	8%
Total	-1.358	100%

La productividad A explica más de la mitad de la brecha entre los dos países: es el componente cuantitativamente dominante. Este resultado replica el hallazgo central de Hall y Jones (1999).

(d) Política prioritaria.

Solución:

Si solo se pudiera intervenir en un componente, la respuesta del modelo es la productividad A, ya que explica el 51% de la brecha. En la práctica, A no es una variable que se toque directamente: es un residuo que captura instituciones, calidad del estado de derecho, eficiencia en la asignación de recursos, infraestructura, capital social, apertura tecnológica, etc. La implicación de política es invertir en *instituciones* y *adopción tecnológica* (apertura, transferencia, ajuste regulatorio), más allá de mera acumulación de capital físico.

El capital humano h es la segunda prioridad (26% de la brecha) y sí es directamente intervenible mediante políticas educativas. La inversión en capital físico (K/Y) y los factores demográficos (L/N) explican relativamente poco.

3 Difusión tecnológica

$g_D = \psi\, h\, (A/D)^{\gamma}$.
Valores: $\psi = 0.005$, $h = 2$, $\gamma = 0.5$, $g_A = 0.02$.

(a) Interpretación.

Solución:

Por qué (A/D) acelera la difusión: Cuanto mayor es la brecha tecnológica, más conocimiento existe *ya descubierto* en la frontera y disponible para ser copiado / adaptado por el seguidor. Adoptar es más barato que inventar: las ideas existentes funcionan como un "stock de oportunidades" que el país atrasado puede explotar. Esta es precisamente la lógica de la *ventaja del rezago* (Gerschenkron): los países atrasados pueden crecer más rápido porque pueden saltarse etapas e importar tecnología madura.

Papel de h: El capital humano determina la *capacidad de absorción*. Para usar un manual técnico, una patente o una máquina importada hace falta personal cualificado. Sin h suficiente (alfabetización, ingenieros, técnicos), las ideas extranjeras simplemente no pueden ser asimiladas, aunque estén disponibles libremente. Por eso h multiplica la tasa de difusión.

(b) Derivación del gap de estado estacionario.

Solución:

En la senda de crecimiento equilibrado (BGP), la ratio A/D debe ser constante, lo que requiere que D crezca a la misma tasa que A:

$$g_D = g_A$$

Sustituyendo en la ecuación de difusión:

$$\psi\, h \left(\frac{A}{D}\right)^{\gamma} = g_A$$

Despejando:

$$\left(\frac{A}{D}\right)^{\gamma} = \frac{g_A}{\psi\, h}$$

$$\boxed{\left(\frac{A}{D}\right)^{ss} = \left(\frac{g_A}{\psi\, h}\right)^{1/\gamma}}$$

Nótese que el gap es *mayor* cuanto menor sea h o ψ (peor capacidad de absorción) y *menor* cuanto más rápido se acumule conocimiento extranjero (mayor g_A implica más oportunidades, pero también más distancia que recorrer; el efecto neto es que un g_A alto eleva el gap).

(c) Cálculo numérico.

Solución:

Con $\psi = 0.005$, $h = 2$ tenemos $\psi h = 0.01$. Entonces:

$$\left(\frac{A}{D}\right)^{ss} = \left(\frac{0.02}{0.01}\right)^{1/0.5} = 2^2 = 4$$

Por tanto:

$$\boxed{\left(\frac{A}{D}\right)^{ss} = 4 \quad \Longrightarrow \quad D^{ss} = \tfrac{1}{4}\, A}$$

El seguidor alcanza, en el largo plazo, sólo el 25% del nivel de tecnología de la frontera. La brecha no se cierra: el país queda permanentemente rezagado, aunque crece a la misma *tasa* que la frontera.

(d) Mejora educativa: $h = 2 \rightarrow h = 4$.

Solución:

Con $h = 4$: $\psi h = 0.02$, igual a g_A. Entonces:

$$\left(\frac{A}{D}\right)^{ss} = \left(\frac{0.02}{0.02}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{D^{ss} = A}$$

La brecha se cierra completamente. Duplicar el capital humano permite al país seguidor situarse exactamente al nivel de la frontera tecnológica.

En general, el valor de h que cierra la brecha por completo $(A/D)^{ss} = 1$ resuelve $\psi h = g_A$, esto es:

$$h^* = \frac{g_A}{\psi} = \frac{0.02}{0.005} = 4$$

Importante: Aun en este caso límite, la *tasa de crecimiento* de largo plazo sigue siendo g_A (la tasa de la frontera). El capital humano determina el *nivel relativo*, no la tasa.

4 Comercio e importación de variedades

$Y = K^\alpha (DhL)^{1-\alpha} (1 + M/D)^{1-\alpha}$.
Valores: $\alpha = 1/3$, de modo que $1 - \alpha = 2/3$.

(a) Interpretación del factor $(1 + M/D)^{1-\alpha}$.

Solución:

El factor refleja un *efecto amor por la variedad*: en un esquema CES con bienes intermedios diferenciados, ampliar el conjunto de variedades usadas en producción eleva la productividad incluso si la cantidad agregada de capital es la misma. Importar variedades extranjeras es funcionalmente equivalente, desde el punto de vista de la tecnología agregada, a haber inventado más variedades en casa.

Equivalencia con un stock efectivo de variedades: como

$$(DhL)^{1-\alpha}\left(1 + \frac{M}{D}\right)^{1-\alpha} = \left[D\left(1 + \frac{M}{D}\right)hL\right]^{1-\alpha} = \big((D + M)hL\big)^{1-\alpha},$$

importar M variedades equivale a ampliar el stock efectivo desde D hasta $D + M$. La medición empírica de la PTF (productividad total de los factores) recoge este efecto como un aumento de A, aunque internamente se deba a más variedades.

(b) Apertura: $M/D : 0 \to 0.5$.

Solución:

Con todo lo demás constante:

$$\frac{Y_{\text{abierto}}}{Y_{\text{autarquía}}} = \frac{(1+0.5)^{2/3}}{(1+0)^{2/3}} = 1.5^{2/3}$$

$$\begin{aligned}1.5^{2/3} &= e^{(2/3)\ln 1.5} = e^{(2/3)(0.405)} = e^{0.270} \\ &\approx 1.310\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta Y \approx +31\%}$$

(c) Apertura mayor: $M/D = 1$.

Solución:

$$\frac{Y(M/D=1)}{Y(M/D=0)} = 2^{2/3} = e^{(2/3)\ln 2} \approx e^{0.462} \approx 1.587$$

Por tanto $\Delta Y \approx +59\%$ respecto a autarquía.

Rendimientos decrecientes: Pasar de $M/D = 0$ a 0.5 aporta $+31\%$. Pasar de 0.5 a 1 aporta sólo un $+(1.587/1.310 - 1) = +21\%$ adicional. La ganancia marginal de abrirse cae con el grado de apertura ya alcanzado, consistente con $\partial^2 Y/\partial(M/D)^2 < 0$ por la concavidad de $(1 + M/D)^{1-\alpha}$.

(d) Comparación con Romer.

Solución:

Similitudes:

- Ambos mecanismos amplían el conjunto efectivo de variedades J que entran en la función de producción.
- Ambos generan rendimientos crecientes a escala vía la no rivalidad de las ideas.

Diferencias:

- Origen de las ideas: En Romer las variedades se *inventan* domésticamente vía I+D ($\dot{A} = \theta L_R^\lambda A^\phi$). Con apertura, se *importan* sin necesidad de innovación local.
- Apropiabilidad y rentas: En Romer, el inventor cobra rentas monopolísticas perpetuas; el país receptor del comercio paga por las importaciones (rentas se las queda el productor extranjero).
- Acceso: La apertura sólo funciona si hay mercados, infraestructura, IED, baja barrera arancelaria; la I+D doméstica es independiente del entorno comercial.

- Efectos de escala: En Romer, países grandes innovan más; en la versión de apertura, hasta un país pequeño puede acceder a toda la frontera vía comercio.

Implicación: Para países lejos de la frontera tecnológica, el comercio (importar variedades) es un canal de crecimiento mucho más eficiente que la I+D doméstica. Para países en la frontera, sólo queda inventar.

5 Verdadero o Falso

(a) Mejorar h aumenta permanentemente la tasa de crecimiento del PIB per cápita en BGP.

Solución:

FALSO. En el modelo de difusión, en BGP el seguidor crece a la *misma tasa que la frontera*: $g_D^{ss} = g_A$ (exógeno). Un aumento permanente de h *cierra* la brecha (reduce $(A/D)^{ss}$, eleva el *nivel* relativo de productividad), pero no altera la tasa de crecimiento de largo plazo, que está dictada por la frontera. Sólo durante la transición la tasa g_D supera a g_A (efecto temporal de aceleración).

Para cambiar permanentemente la tasa, el país tendría que dejar de ser seguidor y convertirse él mismo en frontera (innovador), entrando en un régimen tipo Romer.

(b) Hall–Jones: la mayor parte de la brecha se explica por K/Y.

Solución:

FALSO. El hallazgo central de Hall y Jones (1999) es exactamente el contrario: la *productividad* A (y, en menor medida, el capital humano h) explica la mayor parte de las diferencias de PIB per cápita entre países. La ratio capital-producto K/Y varía relativamente poco entre países (dado que el numerador y denominador se mueven juntos en el largo plazo) y contribuye típicamente menos del 20% de la brecha en logaritmos. En el ejercicio 2 obteníamos un 15% para K/Y frente a un 51% para A.

La interpretación habitual: lo que separa a países ricos y pobres no es cuánto capital físico acumulan, sino *cómo de eficientemente lo usan* (instituciones, gestión, asignación, tecnología disponible).

(c) Importar variedades extranjeras eleva la productividad sin necesidad de I+D doméstica.

Solución:

VERDADERO. El factor $(1 + M/D)^{1-\alpha}$ en la función de producción muestra precisamente que abrir la economía a importaciones de bienes intermedios diferenciados eleva el output (y, por tanto, la PTF medida) aun manteniendo K, L, h y D fijos. Como vimos en el ejercicio 4, pasar de $M/D = 0$ a $M/D = 0.5$ aumenta Y un 31% sin necesidad de inventar nada localmente.

Matiz importante: aunque no requiere I+D, sí requiere capital humano h adecuado para absorber e integrar las variedades importadas en los procesos productivos (capacidad de absorción). Sin trabajadores cualificados, la importación de maquinaria avanzada no se traduce en mayor productividad efectiva.