HOJA DE PROBLEMAS 4 — SOLUCIONES
Innovación y el Modelo de Romer

Crecimiento Económico
CUNEF

1 Función de acumulación de ideas

$\dot{A}_t = \theta\, L_{Rt}^{\lambda}\, A_t^{\phi}$

(a) No rivalidad y excluibilidad de las ideas.

Solución:

No rivalidad: Una idea puede ser utilizada por múltiples personas simultáneamente sin que su uso por parte de una persona reduzca la disponibilidad para otras.

Ejemplo: La fórmula de la penicilina puede ser usada por millones de médicos al mismo tiempo. Si un médico en Madrid usa la fórmula para curar a un paciente, esto no impide que otro médico en Barcelona use la misma fórmula simultáneamente.

Potencialmente excluible: Aunque las ideas son no rivales, es posible (mediante patentes, secretos comerciales, etc.) excluir a otros del uso de una idea.

Ejemplo: Una empresa farmacéutica puede patentar un nuevo medicamento, impidiendo que otras empresas lo produzcan durante 20 años, aunque la fórmula química en sí podría ser usada por todos sin reducir su valor.

Importancia para el crecimiento: La no rivalidad implica que las ideas pueden generar rendimientos crecientes a escala agregada (más personas pueden beneficiarse de la misma idea sin coste adicional). La excluibilidad permite incentivar la innovación mediante patentes y derechos de propiedad intelectual, resolviendo el problema de la provisión de un bien público.

(b) Interpretación de parámetros.

Solución:

Parámetro $\theta > 0$: Mide la *productividad de la investigación*. Un valor alto de θ indica que los investigadores son más eficientes en generar nuevas ideas con los mismos recursos.

Parámetro $\lambda > 0$: Mide los *rendimientos del trabajo investigador*. Si $\lambda = 1$, duplicar el número de investigadores duplica la producción de ideas (rendimientos constantes). Si $\lambda < 1$, hay rendimientos decrecientes a escala en investigación.

Parámetro ϕ: Mide los *rendimientos del stock de conocimiento existente*.

- Si $\phi > 0$: Las ideas existentes facilitan la creación de nuevas ideas ("standing on the shoulders of giants"). Un stock mayor de conocimiento hace más productiva la investigación.
- Si $\phi < 1$: Hay rendimientos decrecientes al stock de ideas. A medida que crece A_t, cada idea adicional es más difícil de descubrir ("fishing out" – las ideas fáciles ya se han descubierto).
- El caso $0 < \phi < 1$ combina ambos efectos: las ideas ayudan a crear nuevas ideas, pero con rendimientos decrecientes.

(c) Derivación de g_A.

Solución:

La tasa de crecimiento del stock de ideas se define como:

$$g_A = \frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

Sustituyendo $\dot{A}_t = \theta\, L_{Rt}^{\lambda}\, A_t^{\phi}$:

$$g_A = \frac{\theta\, L_{Rt}^{\lambda}\, A_t^{\phi}}{A_t} = \theta\, L_{Rt}^{\lambda}\, A_t^{\phi-1}$$

Por tanto:

$$\boxed{g_A = \theta\, L_{Rt}^{\lambda}\, A_t^{\phi-1}}$$

(d) Cálculo numérico.

Solución:

Dados: $\theta = 0.05$, $L_R = 100$, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $A_0 = 400$.

$$\begin{aligned} g_A &= \theta\, L_R^{\lambda}\, A_0^{\phi-1} \\ &= 0.05 \times 100^1 \times 400^{0.5-1} \\ &= 0.05 \times 100 \times 400^{-0.5} \\ &= 5 \times \frac{1}{\sqrt{400}} \\ &= 5 \times \frac{1}{20} \\ &= 0.25 = 25\% \end{aligned}$$

La tasa de crecimiento inicial del stock de ideas es del $\boxed{25\%}$ anual.

2 Dinámica de la productividad y estado estacionario

$g_A = \theta\, s_R^{\lambda}\, \frac{L_t^{\lambda}}{A_t^{1-\phi}}$
Valores: $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $g_L = 0.02$.

(a) Condición para BGP.

Solución:

Partimos de:

$$g_A = \theta\, s_R^{\lambda}\, L_t^{\lambda}\, A_t^{\phi-1}$$

Para que g_A sea constante en la senda de crecimiento equilibrado, el lado derecho no puede depender del tiempo. Dado que θ y s_R son constantes, necesitamos que:

$$L_t^{\lambda}\, A_t^{\phi-1} = \text{constante}$$

Tomando logaritmos y derivando respecto al tiempo:

$$\lambda \frac{\dot{L}_t}{L_t} + (\phi - 1) \frac{\dot{A}_t}{A_t} = 0$$
$$\lambda\, g_L + (\phi - 1)\, g_A = 0$$

Por tanto, la condición de BGP es:

$$\boxed{g_A = \frac{\lambda}{1-\phi}\, g_L}$$

(b) Demostración de g_A^{BGP}.

Solución:

De la condición derivada en (a):

$$\lambda\, g_L + (\phi - 1)\, g_A = 0$$

Despejando g_A:

$$(\phi - 1)\, g_A = -\lambda\, g_L$$
$$g_A = \frac{-\lambda\, g_L}{\phi - 1}$$
$$g_A = \frac{\lambda\, g_L}{1 - \phi}$$

Dado que $\phi < 1$, tenemos $1 - \phi > 0$, por lo que:

$$\boxed{g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi}\, g_L}$$

(c) Cálculo numérico.

Solución:

Dados: $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $g_L = 0.02$.

$$\begin{aligned} g_A^{BGP} &= \frac{\lambda}{1-\phi} g_L \\ &= \frac{1}{1-0.5} \times 0.02 \\ &= \frac{1}{0.5} \times 0.02 \\ &= 2 \times 0.02 \\ &= 0.04 = 4\% \end{aligned}$$

La tasa de crecimiento del stock de ideas en BGP es $\boxed{g_A^{BGP} = 4\%}$ anual.

En el modelo de Romer, el PIB per cápita crece a la misma tasa que la productividad:

$$g_y^{BGP} = g_A^{BGP} = \boxed{4\%}$$

(d) Efectos de política.

Solución:

De la expresión $g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi} g_L$, observamos que:

Respecto a θ: La tasa de crecimiento de largo plazo g_A^{BGP} no depende de θ (productividad de la investigación). Un aumento en θ aumenta g_A temporalmente, pero no afecta la tasa de crecimiento de largo plazo.

Respecto a s_R: La tasa de crecimiento de largo plazo g_A^{BGP} no depende de s_R (fracción de investigadores). Un aumento en s_R aumenta g_A temporalmente, pero no afecta la tasa de crecimiento de largo plazo.

Implicaciones para política:

- Las políticas que aumentan la productividad de I+D (θ) o la intensidad de investigación (s_R) tienen *efectos de nivel* permanentes (aumentan el nivel del PIB per cápita), pero solo *efectos de crecimiento temporales*.
- A largo plazo, la única forma de aumentar permanentemente la tasa de crecimiento es aumentar g_L (tasa de crecimiento poblacional) o cambiar los parámetros estructurales λ y ϕ.
- Esto contrasta con el modelo de Solow, donde ninguna política puede afectar la tasa de crecimiento de largo plazo (que es g_A, exógeno).

3 Efectos de escala en el crecimiento

Valores: $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$.

(a) Solow vs Romer.

Solución:

En el modelo de Solow: El tamaño de la población L_t NO afecta la tasa de crecimiento de largo plazo del PIB per cápita. La tasa de crecimiento de largo plazo es $g_y^{BGP} = g_A$, donde g_A es *exógeno* (determinado fuera del modelo). El tamaño poblacional solo afecta el *nivel* del PIB per cápita a través de efectos de dilución del capital.

En el modelo de Romer: El tamaño de la población L_t SÍ afecta la tasa de crecimiento de largo plazo. Específicamente, la *tasa de crecimiento* poblacional g_L determina la tasa de crecimiento del PIB per cápita:

$$g_y^{BGP} = g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi}\, g_L$$

Diferencia fundamental: En Solow, el progreso tecnológico es exógeno ("maná del cielo"). En Romer, el progreso tecnológico es endógeno y depende de cuántos investigadores hay, lo cual está vinculado al tamaño y crecimiento de la población. Más población → más investigadores potenciales → más ideas → más crecimiento.

(b) Contraste de predicciones.

Solución:

En Romer: $g_y^{BGP} = g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi}\, g_L$

La tasa de crecimiento del PIB per cápita es *endógena* y depende de g_L a través del mecanismo de innovación endógena. Si la población crece más rápido (g_L mayor), hay más investigadores en cada período, lo que genera más ideas, aumentando g_A y por tanto g_y.

En Solow: $g_y^{BGP} = g_A$ (exógeno)

La tasa de crecimiento del PIB per cápita es *exógena* e igual a la tasa de progreso tecnológico g_A, que se asume dada. El crecimiento poblacional g_L no afecta g_y a largo plazo; solo afecta el nivel de capital por trabajador efectivo k^{SS} en el estado estacionario.

Resumen:

- Romer: g_y depende endógenamente de g_L
- Solow: g_y es independiente de g_L (es exógeno)

(c) Comparación entre países.

Solución:

Dados: $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $g_L^A = 0.01$, $g_L^B = 0.03$.

País A:

$$
\begin{aligned}
g_y^{BGP,A} &= \frac{\lambda}{1-\phi}\, g_L^A \\
&= \frac{1}{1-0.5} \times 0.01 \\
&= 2 \times 0.01 \\
&= 0.02 = 2\%
\end{aligned}
$$

País B:

$$
\begin{aligned}
g_y^{BGP,B} &= \frac{\lambda}{1-\phi}\, g_L^B \\
&= \frac{1}{1-0.5} \times 0.03 \\
&= 2 \times 0.03 \\
&= 0.06 = 6\%
\end{aligned}
$$

El País A crece al $\boxed{2\%}$ anual y el País B al $\boxed{6\%}$ anual.

País B, con mayor crecimiento poblacional, tiene una tasa de crecimiento del PIB per cápita tres veces mayor que País A. Esto es una predicción distintiva del modelo de Romer: *países con mayor crecimiento poblacional deberían crecer más rápido* (aunque la evidencia empírica es mixta).

(d) Efectos de nivel de población.

Solución:

Partimos de:

$$g_A = \theta\, s_R^\lambda\, L_t^\lambda\, A_t^{\phi-1}$$

En la BGP, sabemos que $g_A = \frac{\lambda}{1-\phi}\, g_L$ (constante). Para que esto se cumpla cuando L_t crece, A_t también debe crecer proporcionalmente.

Específicamente, reescribiendo la condición de BGP:

$$\theta\, s_R^\lambda\, L_t^\lambda\, A_t^{\phi-1} = \frac{\lambda}{1-\phi}\, g_L$$

Podemos expresar el nivel de A_t en BGP como función de L_t:

$$A_t^{\phi-1} = \frac{\lambda\, g_L}{\theta\, s_R^\lambda\, (1-\phi)\, L_t^\lambda}$$

$$A_t = \left[\frac{\lambda\, g_L}{\theta\, s_R^\lambda\, (1-\phi)\, L_t^\lambda}\right]^{\frac{1}{\phi-1}}$$

Dado que $\phi - 1 < 0$ (asumimos $\phi < 1$), tenemos $\frac{1}{\phi-1} < 0$, por lo que:

$$A_t \propto L_t^{\frac{\lambda}{1-\phi}}$$

Conclusión: SÍ, el nivel de la población L_t afecta positivamente el nivel del stock de ideas A_t en la BGP. Poblaciones más grandes generan más ideas acumuladas. Esto se conoce como *efecto de escala fuerte*: no solo la tasa de crecimiento poblacional afecta la tasa de crecimiento de ideas, sino que el nivel poblacional afecta el nivel de ideas.

Este es un resultado controvertido del modelo de Romer, ya que implica que China debería tener mucho mayor nivel de tecnología que Luxemburgo solo por tener más población, lo cual no se observa empíricamente.

4 Estática comparativa — aumento en investigadores

$g_A = \theta\, s_R^{\lambda}\, L^{\lambda}\, A^{\phi-1}$
Para el impacto inmediato: $\theta = 0.1$, $L_0 = 1{,}000$, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $A_0 = 100$. Para el largo plazo: $g_L = 0.02$.

(a) Efecto inmediato.

Solución:

Cuando s_R aumenta de 0.05 a 0.10, el efecto inmediato sobre g_A (en $t = 0$, antes de que A haya cambiado) es:

Antes del cambio ($s_R = 0.05$):

$$g_A^{\text{antes}} = 0.1 \times 0.05^1 \times 1{,}000^1 \times A_0^{-0.5}$$

Después del cambio ($s_R = 0.10$):

$$g_A^{\text{después}} = 0.1 \times 0.10^1 \times 1{,}000^1 \times A_0^{-0.5}$$

Tomando la ratio:

$$\frac{g_A^{\text{después}}}{g_A^{\text{antes}}} = \frac{0.10}{0.05} = 2$$

Por tanto, inmediatamente después del cambio, la tasa de crecimiento del stock de ideas se duplica. Estos son efectos de impacto calculados en el punto inicial dado por $A_0 = 100$ y $L_0 = 1{,}000$.

Intuición: Al duplicar el número de investigadores, y dado que $\lambda = 1$ (rendimientos constantes al trabajo investigador), la producción de nuevas ideas se duplica instantáneamente.

(b) Efecto de largo plazo.

Solución:

En el largo plazo, cuando la economía alcanza la nueva senda de crecimiento equilibrado:

$$g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi}\, g_L = \frac{1}{1-0.5} \times 0.02 = 2 \times 0.02 = 0.04 = 4\%$$

Conclusión: La tasa de crecimiento de largo plazo no cambia. En la nueva BGP vuelve a ser del 4%, igual que en la BGP previa al aumento en s_R.

Comparación corto vs largo plazo:

- Corto plazo: g_A se duplica inmediatamente (efecto temporal muy fuerte)
- Largo plazo: g_A vuelve a $g_A^{BGP} = 4\%$ (sin efecto permanente sobre la tasa de crecimiento)

¿Por qué vuelve a bajar g_A? Porque a medida que A_t crece más rápido (debido al mayor s_R), se acumulan más ideas, y el término $A_t^{\phi-1} = A_t^{-0.5}$ disminuye, frenando g_A hasta que converge a la tasa de largo plazo determinada por g_L.

Sin embargo, aunque la *tasa de crecimiento* vuelve al 4%, el *nivel* del PIB per cápita es permanentemente mayor.

(c) Cálculos numéricos.

Solución:

Tasa de crecimiento inicial con $s_R = 0.05$:

$$\begin{aligned} g_A^{\text{inicial}} &= \theta\, s_R^{\lambda}\, L^{\lambda}\, A_0^{\phi-1} \\ &= 0.1 \times 0.05^1 \times 1{,}000^1 \times 100^{-0.5} \\ &= 0.1 \times 0.05 \times 1{,}000 \times \frac{1}{10} \\ &= 0.1 \times 0.05 \times 100 \\ &= 0.5 = 50\% \end{aligned}$$

Nueva tasa inmediatamente después del aumento a $s_R = 0.10$:

$$\begin{aligned} g_A^{\text{nuevo}} &= 0.1 \times 0.10^1 \times 1{,}000^1 \times 100^{-0.5} \\ &= 2 \times g_A^{\text{inicial}} \\ &= 2 \times 0.5 \\ &= 1.0 = 100\% \end{aligned}$$

Tasa de crecimiento de largo plazo:

$$g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi}\, g_L = \frac{1}{0.5} \times 0.02 = 0.04 = 4\%$$

Resumen:

Momento	Tasa de crecimiento g_A
Inicial ($s_R = 0.05$)	50%
Inmediatamente después ($s_R = 0.10$)	100%
Largo plazo (BGP)	4%

(d) Interpretación económica.

Solución:

Efectos sobre la tasa de crecimiento:

- El aumento en s_R tiene un efecto temporal sobre la tasa de crecimiento g_A. La economía experimenta un período de crecimiento acelerado (transición), pero eventualmente la tasa de crecimiento vuelve a su valor de largo plazo determinado por g_L.
- Este resultado es peculiar del modelo de Romer con $0 < \phi < 1$. Los rendimientos decrecientes al stock de conocimiento ($\phi < 1$) implican que, aunque dedicamos más recursos a I+D, eventualmente encontrar nuevas ideas se vuelve más difícil, limitando el crecimiento.

Efectos sobre el nivel del PIB per cápita:

- Aunque la tasa de crecimiento vuelve al 4% en el largo plazo, el nivel del PIB per cápita es permanentemente mayor.
- Durante el período de transición (crecimiento acelerado), la economía acumula más ideas (A_t alcanza un nivel superior). Este mayor stock de ideas implica mayor productividad y mayor PIB per cápita permanentemente.
- Por tanto, las políticas de I+D tienen *efectos de nivel permanentes* pero *efectos de crecimiento solo temporales*.

Implicación de política: Para aumentar permanentemente la tasa de crecimiento, no basta con invertir más en I+D. Hace falta cambiar parámetros estructurales (aumentar g_L, mejorar λ o ϕ) o mantener aumentos continuos en s_R (lo cual es insostenible, ya que $s_R < 1$).

5 Decisión de inversión en I+D

$\dot{A} = \theta\, L_{Rt}^{\lambda}\, A^{\phi}$
Valores: $w = 1$, $\theta = 0.05$, $L_R = 50$, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $A = 100$, $r = 0.10$.

(a) Derivación del coste de innovación.

Solución:

El coste de crear una nueva idea es:

$$F = \frac{w_t}{\partial \dot{A}/\partial L_{Rt}}$$

Necesitamos calcular la productividad marginal de un investigador adicional. Partiendo de:

$$\dot{A} = \theta \, L_{Rt}^{\lambda} \, A^{\phi}$$

Derivamos con respecto a L_{Rt}:

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial L_{Rt}} = \theta \, \lambda \, L_{Rt}^{\lambda-1} \, A^{\phi}$$

Sustituyendo en la expresión del coste:

$$\begin{aligned} F &= \frac{w_t}{\theta \, \lambda \, L_{Rt}^{\lambda-1} \, A^{\phi}} \\ &= \frac{w_t}{\lambda \, \theta \, L_{Rt}^{\lambda-1} \, A^{\phi}} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\boxed{F = \frac{w_t}{\lambda \, \theta \, L_{Rt}^{\lambda-1} \, A^{\phi}}}$$

Interpretación: El coste de una idea es inversamente proporcional a la productividad marginal de los investigadores. Si los investigadores son más productivos (mayor θ, mayor A), el coste de innovar es menor.

(b) Valor de una innovación.

Solución:

El valor de una innovación es el valor presente de los beneficios monopolísticos perpetuos:

$$V = \frac{\pi}{r - g_{\pi}}$$

Dados: $\pi = 0.1Y$ (beneficios son 10% del PIB), $g_{\pi} = g_Y = 0.04$, $r = 0.10$.

La ratio valor-beneficio es:

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \frac{1}{r - g_{\pi}} \\ &= \frac{1}{0.10 - 0.04} \\ &= \frac{1}{0.06} \\ &= 16.67 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\boxed{\frac{V}{\pi} = 16.67}$$

Interpretación: El valor de una innovación es aproximadamente 16.67 veces los beneficios anuales. Esto refleja que la innovación genera beneficios perpetuos que crecen al 4% anual, descontados a la tasa del 10%.

(c) Condición de entrada libre.

Solución:

Cálculo del coste F:

Dados: $w = 1$, $\theta = 0.05$, $L_R = 50$, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $A = 100$.

$$\begin{aligned} F &= \frac{w}{\lambda\,\theta\,L_R^{\lambda-1}\,A^{\phi}} \\ &= \frac{1}{1 \times 0.05 \times 50^0 \times 100^{0.5}} \\ &= \frac{1}{0.05 \times 1 \times 10} \\ &= \frac{1}{0.5} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Cálculo del valor V:

Del apartado (b), sabemos que $V/\pi = 16.67$. Si $\pi = 10$:

$$V = 16.67 \times 10 = 166.7$$

Verificación de la condición $V = F$:

$$V = 166.7 \neq 2 = F$$

Conclusión: NO se cumple la condición de entrada libre. De hecho, $V \gg F$ (el valor es mucho mayor que el coste), lo que implica que es muy rentable invertir en I+D. Con la calibración del ejercicio, $\lambda = 1$, de modo que $F = w/(\theta A^{\phi})$ no depende de L_R. Por tanto, más entrada no restauraría por sí sola $V = F$ vía un cambio en L_R; harían falta ajustes en salarios, beneficios monopolísticos o productividad de la investigación.

Nota: Los valores numéricos elegidos son ilustrativos. En equilibrio, los parámetros se ajustarían para que $V = F$.

(d) Efecto de aumento en salario.

Solución:

Si el salario w aumenta:

$$F = \frac{w}{\lambda\,\theta\,L_R^{\lambda-1}\,A^{\phi}} \quad \Rightarrow \quad F \uparrow$$

El coste de crear una nueva idea aumenta. Dado que el valor V no cambia de forma mecánica (depende de π, r, g_π), se rompe la condición de equilibrio $V = F$.

Mecanismo de ajuste:

Hay dos canales principales de ajuste para restaurar $V = F$:

Canal 1: Reducción de L_R

- Si w es más alto, menos trabajadores se dedican a I+D (algunos se trasladan al sector productivo).
- Con L_R menor y $\lambda < 1$ (si hubiera rendimientos decrecientes en investigación), la productividad marginal $\partial\dot{A}/\partial L_{Rt}$ aumentaría y eso ayudaría a reducir F.
- Sin embargo, con $\lambda = 1$ (el caso numérico del ejercicio), este canal no opera: F no depende de L_R.

Canal 2: Cambios en productividad / valor

- Un mayor A reduce F porque eleva la productividad de los investigadores cuando $\phi > 0$.
- Pero un aumento de w por sí solo no genera ese mayor A; de hecho, si la I+D cae, el stock de ideas crecerá más lentamente.
- En esta calibración, restaurar $V = F$ requiere algún ajuste adicional: por ejemplo, mayores beneficios monopolísticos V, una caída posterior de salarios, o una mejora de productividad de la investigación θ.

Conclusión: El aumento en w reduce la rentabilidad de innovar y, por tanto, la entrada en I+D. En el caso numérico con $\lambda = 1$, el ajuste no puede venir de L_R por sí solo; para volver a una condición de entrada libre hacen falta cambios en precios/salarios, en los beneficios esperados o en la productividad de la investigación.