

HOJA DE PROBLEMAS 4

Innovación y el Modelo de Romer

Crecimiento Económico CUNEF

Ejercicio 1: Función de acumulación de ideas

En el modelo de Romer, el conocimiento o stock de ideas A_t crece endógenamente a través de la inversión en investigación y desarrollo (I+D). La función de acumulación de ideas viene dada por:

$$\dot{A}_t = \theta L_{Rt}^\lambda A_t^\phi$$

donde $\dot{A}_t = \partial A_t / \partial t$ es la creación de nuevas ideas, L_{Rt} es el número de investigadores dedicados a I+D, $\theta > 0$ es un parámetro de productividad de la investigación, $\lambda > 0$ mide los rendimientos del trabajo investigador, y ϕ mide los rendimientos del stock de conocimiento existente.

A diferencia de los bienes físicos, las ideas tienen características especiales que las hacen fundamentales para el crecimiento económico.

- (a) Explica por qué las ideas son **no rivales** pero **potencialmente excluibles**. Proporciona un ejemplo concreto de cada propiedad y explica por qué esta distinción es importante para el crecimiento económico.
- (b) Considera la función de acumulación de ideas $\dot{A}_t = \theta L_{Rt}^\lambda A_t^\phi$. Interpreta económicamente cada uno de los parámetros θ , λ y ϕ . ¿Qué implica $\phi > 0$? ¿Y $\phi < 1$?
- (c) A partir de la función de acumulación de ideas, deriva la expresión para la **tasa de crecimiento del stock de ideas**:

$$g_A = \frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

- (d) Supón $\theta = 0.05$, $L_R = 100$ investigadores, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, y el stock inicial de ideas es $A_0 = 400$. Calcula la tasa de crecimiento inicial g_A .

Ejercicio 2: Dinámica de la productividad y estado estacionario

En el modelo de Romer, una fracción $s_R \in (0, 1)$ de la población trabaja en I+D, de modo que $L_{Rt} = s_R L_t$, donde L_t es la población total que crece a tasa constante $g_L > 0$. Sustituyendo en la función de acumulación de ideas:

$$\dot{A}_t = \theta (s_R L_t)^\lambda A_t^\phi = \theta s_R^\lambda L_t^\lambda A_t^\phi$$

La tasa de crecimiento del stock de ideas es entonces:

$$g_A = \theta s_R^\lambda \frac{L_t^\lambda}{A_t^{1-\phi}}$$

Valores numéricos: $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $g_L = 0.02$ (2% anual).

- (a) Partiendo de la expresión $g_A = \theta s_R^\lambda L_t^\lambda A_t^{\phi-1}$, deriva la condición que debe cumplirse en la **senda de crecimiento equilibrado** (BGP) para que g_A sea constante en el tiempo.
- (b) Demuestra que en la senda de crecimiento equilibrado la tasa de crecimiento de las ideas es:

$$g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi} g_L$$

- (c) Con los valores numéricos dados, calcula g_A^{BGP} . ¿Cuál es la tasa de crecimiento del PIB per cápita a largo plazo?
- (d) ¿Cómo depende g_A^{BGP} de los parámetros θ (productividad de la investigación) y s_R (fracción de investigadores)? ¿Qué implica esto para las políticas de I+D?

Ejercicio 3: Efectos de escala en el crecimiento

Una de las predicciones clave del modelo de Romer es que el tamaño de la economía (medido por la población L_t) afecta las tasas de crecimiento a largo plazo. Esto contrasta con el modelo de Solow, donde el crecimiento de largo plazo es independiente del tamaño poblacional.

Recordemos que en el modelo de Romer:

$$g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi} g_L$$

mientras que en Solow, g_A es exógeno (no depende de variables endógenas).

Valores numéricos: $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$.

- (a) En el modelo de Solow, ¿el tamaño de la población L_t afecta la tasa de crecimiento de largo plazo del PIB per cápita? ¿Y en el modelo de Romer? Explica la diferencia fundamental entre ambos modelos.
- (b) Explica por qué en Romer se cumple $g_y^{BGP} = g_A^{BGP} = \frac{\lambda}{1-\phi} g_L$, mientras que en Solow $g_y^{BGP} = g_A$ (exógeno).
- (c) Considera dos países idénticos excepto en su tasa de crecimiento poblacional: el País A tiene $g_L = 0.01$ (1% anual) y el País B tiene $g_L = 0.03$ (3% anual). Con $\lambda = 1$ y $\phi = 0.5$, calcula la tasa de crecimiento del PIB per cápita a largo plazo en cada país.
- (d) Según el modelo de Romer, ¿el **nivel** de la población L_t afecta el **nivel** del stock de ideas A_t en la senda de crecimiento equilibrado? Utiliza la expresión $g_A = \theta s_R^\lambda L_t^\lambda A_t^{\phi-1}$ para explicar tu respuesta.

Ejercicio 4: Estática comparativa — aumento en investigadores

Consideremos una economía inicialmente en su senda de crecimiento equilibrado. En el momento $t = 0$, el gobierno implementa una política que aumenta permanentemente la fracción de trabajadores dedicados a I+D de $s_R = 0.05$ a $s_R = 0.10$.

La tasa de crecimiento del stock de ideas viene dada por:

$$g_A = \theta s_R^\lambda L^\lambda A^{\phi-1}$$

Valores numéricos: $\theta = 0.1$, $L = 1,000$ (constante por simplicidad), $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $A_0 = 100$, $g_L = 0.02$.

- Supón que s_R aumenta de 0.05 a 0.10. Utilizando la expresión $g_A = \theta s_R^\lambda L^\lambda A^{\phi-1}$, ¿qué sucede con g_A **inmediatamente** después del cambio en $t = 0$?
- ¿Qué sucede con g_A en el **largo plazo** cuando la economía alcanza la nueva senda de crecimiento equilibrado? Compara el efecto de corto plazo (inmediato) con el efecto de largo plazo.
- Con los valores numéricos dados, calcula:
 - La tasa de crecimiento inicial g_A con $s_R = 0.05$ (antes del cambio)
 - La nueva tasa de crecimiento g_A inmediatamente después del aumento a $s_R = 0.10$
 - La tasa de crecimiento de largo plazo g_A^{BGP} (usa $g_A^{BGP} = 2g_L$ con $g_L = 0.02$)
- Interpreta económicamente: ¿El aumento en la intensidad de I+D tiene efectos **permanentes** o **temporales** sobre la tasa de crecimiento? ¿Sobre el **nivel** del PIB per cápita?

Ejercicio 5: Decisión de inversión en I+D

En el modelo de Romer, las empresas deciden si invertir en I+D comparando el coste de crear una nueva idea con el valor presente de los beneficios que genera.

El **coste** de crear una nueva idea es el salario que hay que pagar a los investigadores necesarios para generar una idea adicional:

$$F = \frac{w_t}{\partial \dot{A} / \partial L_{Rt}}$$

donde w_t es el salario y $\partial \dot{A} / \partial L_{Rt}$ es la productividad marginal de un investigador adicional.

El **valor** de una nueva idea es el valor presente de los beneficios monopolísticos que genera:

$$V = \frac{\pi}{r - g_\pi}$$

donde π son los beneficios del monopolio, r es la tasa de interés, y g_π es la tasa de crecimiento de los beneficios.

La condición de **entrada libre** en I+D implica que en equilibrio: $V = F$.

Valores numéricos: $w = 1$, $\theta = 0.05$, $L_R = 50$, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $A = 100$, $r = 0.10$.

- (a) El coste de crear una nueva idea es $F = \frac{w_t}{\partial \dot{A} / \partial L_{Rt}}$. Utilizando la función de acumulación de ideas $\dot{A} = \theta L_{Rt}^\lambda A^\phi$, deriva la expresión:

$$F = \frac{w_t}{\lambda \theta L_{Rt}^{\lambda-1} A^\phi}$$

- (b) El valor de una innovación es $V = \frac{\pi}{r-g_\pi}$. Si los beneficios monopolísticos representan el 10% del PIB ($\pi = 0.1Y$) y crecen a la misma tasa que el PIB ($g_\pi = g_Y = 0.04$), y la tasa de interés es $r = 0.10$, calcula la ratio V/π (el múltiplo de beneficios que vale una innovación).
- (c) La condición de entrada libre es $V = F$. Con los valores numéricos dados ($w = 1$, $\theta = 0.05$, $L_R = 50$, $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $A = 100$), calcula:
- El coste de crear una nueva idea: F
 - El valor de una innovación: V (supón $\pi = 10$ a partir del apartado anterior)
 - ¿Se cumple la condición de entrada libre $V = F$?
- (d) Supón que el salario w aumenta. ¿Qué sucede con el coste de innovar F ? ¿Cómo se ajusta la economía? (Pista: considera qué pasa con L_R , A , o ambos para restaurar la condición $V = F$).