

HOJA DE PROBLEMAS 3

El Modelo de Solow

Crecimiento Económico

CUNEF

Ejercicio 1: Función de producción Cobb-Douglas

En el modelo de Solow, la producción agregada viene dada por una función Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$$

donde K_t es el capital, L_t el trabajo, A_t la tecnología (eficiencia del trabajo), y $\alpha \in (0, 1)$ es la participación del capital en la renta.

Las empresas, que operan en competencia perfecta, maximizan beneficios $\Pi_t = Y_t - r_t K_t - w_t L_t$, donde r_t es la tasa de retorno del capital y w_t el salario.

Supongamos $K_t = 1,000$, $A_t = 5$, $L_t = 200$, $\alpha = 1/3$.

- (a) Demuestra que la función de producción tiene **rendimientos constantes a escala**: si multiplicamos K_t y L_t por una constante $\lambda > 0$, la producción se multiplica por λ .
- (b) Calcula las productividades marginales de capital y trabajo:

$$\text{PMgK} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t}, \quad \text{PMgL} = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t}$$

Obtén las expresiones generales y evalúa numéricamente.

- (c) En competencia perfecta, cada factor se remunera según su productividad marginal ($r_t = \text{PMgK}$, $w_t = \text{PMgL}$). Demuestra que la **participación del capital** en la renta total es constante e igual a α :

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \alpha$$

y que la **participación del trabajo** es $1 - \alpha$. ¿Con qué Hechos de Kaldor es consistente este resultado?

- (d) Calcula Y_t y el PIBpc $y_t = Y_t/L_t$ con los valores numéricos dados.

Ejercicio 2: Acumulación de capital y estado estacionario

La ecuación de acumulación de capital del modelo de Solow es:

$$\dot{K}_t = s Y_t - \delta K_t$$

donde $s \in (0, 1)$ es la tasa de ahorro (exógena), $\delta > 0$ es la tasa de depreciación, y $\dot{K}_t = \partial K_t / \partial t$.

Definimos el **capital por unidad de trabajo efectivo** como:

$$k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$$

La población y la tecnología crecen a tasas constantes y exógenas g_L y g_A , respectivamente.

Valores numéricos: $\alpha = 1/3$, $s = 0.20$, $\delta = 0.05$, $g_A = 0.02$, $g_L = 0.01$.

(a) Demuestra que la tasa de crecimiento del capital se puede escribir como:

$$g_K = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = s \frac{Y_t}{K_t} - \delta = s k_t^{-(1-\alpha)} - \delta$$

(b) La tasa de crecimiento de k_t es $g_k = g_K - g_A - g_L$. En el estado estacionario, $g_k = 0$, de modo que $g_K = g_A + g_L$. Usando esta condición, deriva la expresión del capital de estado estacionario:

$$k^{SS} = \left(\frac{s}{g_A + g_L + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(c) Calcula k^{SS} con los valores numéricos dados.

(d) El PIBpc en la senda de crecimiento equilibrado (BGP) es:

$$y_t^{BGP} = A_t (k^{SS})^\alpha$$

¿De qué parámetros depende el **nivel** de y_t^{BGP} ? ¿Y su **tasa de crecimiento** a largo plazo?

Ejercicio 3: Senda de crecimiento equilibrado (BGP)

Partimos de los resultados del Ejercicio 2. En la senda de crecimiento equilibrado (BGP), el capital por unidad de trabajo efectivo es constante ($k_t = k^{SS}$).

Recuerda que el PIBpc se puede descomponer como:

$$y_t = A_t k_t^\alpha \implies g_y = g_A + \alpha g_k$$

y que el retorno del capital es $r_t = \alpha Y_t / K_t$.

(a) Demuestra que en la BGP:

- $g_y^{BGP} = g_A$ (el PIBpc crece a la tasa del progreso tecnológico)

- $g_Y^{BGP} = g_A + g_L$ (el PIB agregado crece por tecnología y población)
- (b) Demuestra que la tasa de retorno del capital es constante en la BGP ($g_r^{BGP} = 0$). (Pista: expresa r_t en función de k_t .)
- (c) Verifica que los resultados de los apartados (a) y (b) son consistentes con los cuatro Hechos de Kaldor. Indica explícitamente a qué Hecho corresponde cada resultado.
- (d) Con los valores del Ejercicio 2 ($g_A = 0.02$, $g_L = 0.01$), ¿a qué tasa crece el PIBpc en la BGP? ¿A qué tasa crece el PIB agregado? ¿En cuántos años se duplica el PIBpc?

Ejercicio 4: Estática comparativa — ahorro y dinámica de transición

Las siguientes figuras representan el efecto de un aumento en la tasa de ahorro de s a $s' > s$ en el modelo de Solow. La Figura 1 muestra cómo se desplaza la curva de g_K en función de k_t . La Figura 2 muestra la evolución del PIBpc durante la transición al nuevo estado estacionario.

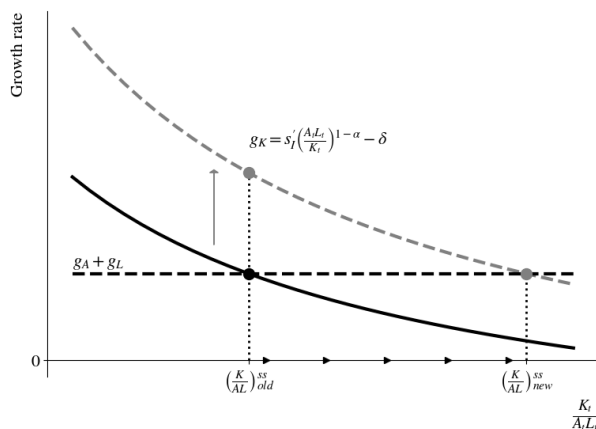


Figura 1: Efecto sobre g_K

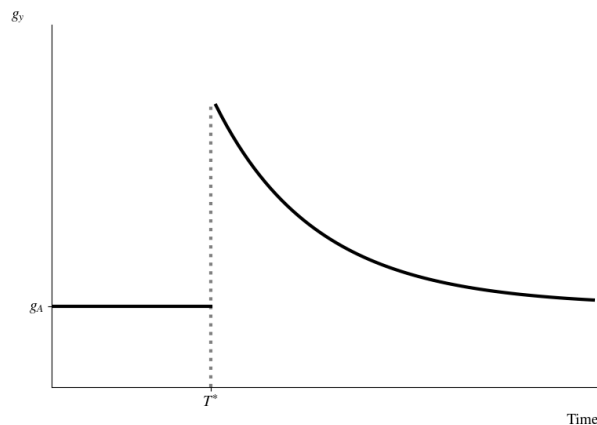


Figura 2: Transición del PIBpc

Recuerda que:

$$k^{SS} = \left(\frac{s}{g_A + g_L + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad g_y = g_A + \alpha (g_K - g_A - g_L)$$

Usa los valores: $\alpha = 1/3$, $\delta = 0.05$, $g_A = 0.02$, $g_L = 0.01$. Inicialmente $s = 0.20$ y aumenta a $s' = 0.30$.

- (a) Observando la Figura 1, explica por qué el aumento de s a s' desplaza la curva g_K hacia arriba. ¿Qué ocurre con g_K en el instante inmediatamente posterior al cambio, si la economía partía de k^{SS} ?
- (b) En la Figura 2, ¿por qué el PIBpc crece temporalmente por encima de g_A durante la transición? ¿Qué componente de $g_y = g_A + \alpha g_k$ lo explica?

- (c) Calcula k^{SS} y $k^{SS'}$ (antes y después del cambio en s). ¿En qué porcentaje aumenta el capital de estado estacionario?
- (d) ¿Cambia la tasa de crecimiento del PIBpc a largo plazo? Explica por qué las diferencias en tasas de ahorro pueden explicar diferencias en *niveles* de PIBpc entre países, pero no diferencias en *tasas de crecimiento* a largo plazo.

Ejercicio 5: La Regla de Oro

Un planificador social quiere elegir la tasa de ahorro s que maximice el **consumo per cápita de estado estacionario**. El consumo per cápita es:

$$c^* = (1 - s) y^*(s)$$

donde $y^*(s) = A_t (k^{SS})^\alpha$ es el PIBpc de estado estacionario, que depende de s a través de:

$$k^{SS} = \left(\frac{s}{g_A + g_L + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Usa los valores: $\alpha = 1/3$, $\delta = 0.05$, $g_A = 0.02$, $g_L = 0.01$, $A_t = 5$.

- (a) Escribe c^* explícitamente como función de s (sustituyendo k^{SS} en y^* y luego en c^*).
- (b) Calcula la condición de primer orden $\partial c^* / \partial s = 0$ y demuestra que la tasa de ahorro que maximiza el consumo de estado estacionario es:

$$s^{GR} = \alpha$$

Esta se conoce como la **Regla de Oro** (*Golden Rule*).

- (c) Con $\alpha = 1/3$, calcula el consumo per cápita de estado estacionario para tres escenarios: $s = 0.20$, $s = s^{GR} = 1/3$, y $s = 0.50$. Verifica que s^{GR} efectivamente maximiza el consumo.
- (d) Interpreta económicamente la Regla de Oro: ¿por qué ahorrar más de α reduce el consumo a pesar de aumentar la producción? ¿Qué sacrificio implica el crecimiento económico?