

HOJA DE PROBLEMAS 2 — SOLUCIONES

La Trampa Malthusiana

Crecimiento Económico

CUNEF

Ejercicio 1: Función de producción y productividad marginal

$Y_t = A_t L_t^{1-\alpha}$, con $A_t = 10$, $\alpha = 0.5$, $L_t = 100$.

(a) Calcula la PMgL.

Solución:

Expresión general:

$$\text{PMgL} = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = A_t (1 - \alpha) L_t^{-\alpha}$$

Evaluación numérica:

$$\text{PMgL} = 10 \times 0.5 \times 100^{-0.5} = 5 \times \frac{1}{10} = 0.5$$

(b) Demuestra que la PMgL es positiva y decreciente.

Solución:

PMgL > 0: Como $A_t > 0$, $(1 - \alpha) > 0$ (ya que $\alpha \in (0, 1)$) y $L_t^{-\alpha} > 0$ para $L_t > 0$, el producto de tres términos positivos es positivo. ✓

PMgL decreciente:

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_t^2} = A_t (1 - \alpha) (-\alpha) L_t^{-\alpha-1}$$

Dado que $A_t > 0$, $(1 - \alpha) > 0$, $\alpha > 0$ y $L_t^{-\alpha-1} > 0$, el signo viene determinado por el factor $(-\alpha) < 0$. Por tanto:

$$\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_t^2} < 0 \quad \checkmark$$

Cada trabajador adicional produce menos que el anterior (producto marginal decreciente).

(c) Obtén la expresión de y_t .

Solución:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{A_t L_t^{1-\alpha}}{L_t} = A_t L_t^{-\alpha}$$

(d) Demuestra que y_t es decreciente en L_t y calcula para $L_t = 100$ y $L_t = 400$.

Solución:

$$\frac{\partial y_t}{\partial L_t} = A_t (-\alpha) L_t^{-\alpha-1} < 0 \quad \checkmark$$

ya que $A_t > 0$, $\alpha > 0$ y $L_t^{-\alpha-1} > 0$.

Cálculos numéricos:

$$y(100) = 10 \times 100^{-0.5} = 10 \times \frac{1}{10} = 1$$

$$y(400) = 10 \times 400^{-0.5} = 10 \times \frac{1}{20} = 0.5$$

Cuando la población se cuadruplica, la renta per cápita se reduce a la mitad. El bienestar cae porque la tierra es fija y los rendimientos del trabajo son decrecientes: más personas comparten el mismo recurso productivo.

Ejercicio 2: Dinámica poblacional y estado estacionario

$$g_L = z(y_t - \underline{c}), \quad y_t = A_t L_t^{-\alpha}, \quad g_y = g_A - \alpha g_L.$$

Valores: $\alpha = 0.5$, $z = 0.02$, $\underline{c} = 1$, $g_A = 0.01$.

(a) Dinámica poblacional según y_t vs. $\underline{c}$.

Solución:

- **Si $y_t > \underline{c}$:** $g_L = z(y_t - \underline{c}) > 0$. La población crece. La renta per cápita está por encima de la subsistencia, lo que permite sostener a más personas (mejor alimentación, menor mortalidad, mayor natalidad).
- **Si $y_t < \underline{c}$:** $g_L = z(y_t - \underline{c}) < 0$. La población decrece. La renta está por debajo de la subsistencia, causando hambre, enfermedades y mayor mortalidad.
- **Si $y_t = \underline{c}$:** $g_L = 0$. La población es constante. La economía se encuentra justo en el nivel de subsistencia, en equilibrio demográfico.

(b) Deriva y^{SS} .

Solución:

En el estado estacionario, $g_y = 0$:

$$g_y = g_A - \alpha g_L = 0 \implies g_L = \frac{g_A}{\alpha}$$

Sustituyendo en la ecuación de dinámica poblacional:

$$\frac{g_A}{\alpha} = z(y^{SS} - \underline{c})$$

Despejando:

$$y^{SS} = \frac{g_A}{\alpha z} + \underline{c}$$

(c) Calcula y^{SS} numéricamente.

Solución:

$$y^{SS} = \frac{0.01}{0.5 \times 0.02} + 1 = \frac{0.01}{0.01} + 1 = 1 + 1 = 2$$

El PIBpc de estado estacionario es $y^{SS} = 2$, el doble del nivel de subsistencia. Es decir, y^{SS} supera $\underline{c}$ en 1 unidad, lo cual permite que la población crezca a la tasa $g_L = g_A/\alpha = 0.02$ en el estado estacionario.

(d) Calcula L^{SS} para $A = 10$.

Solución:

Partimos de $y^{SS} = A(L^{SS})^{-\alpha}$:

$$2 = 10 \times (L^{SS})^{-0.5}$$

$$(L^{SS})^{-0.5} = 0.2 \implies (L^{SS})^{0.5} = 5 \implies L^{SS} = 25$$

La población de estado estacionario (cuando $A = 10$) es $L^{SS} = 25$.

Ejercicio 3: Shock tecnológico en el modelo malthusiano

Estado estacionario inicial: $g_A = 0$, $y^{SS} = \underline{c}$, población constante.

En $t = 0$: $A_0 \rightarrow A_1 > A_0$ (aumento permanente del nivel tecnológico), $g_A = 0$ tras el shock.

- (a) ¿Qué ocurre con y_t inmediatamente tras el shock?

Solución:

Inmediatamente después del shock, la población L no ha cambiado, pero la tecnología ha aumentado:

$$y_t = A_1 L^{-\alpha} > A_0 L^{-\alpha} = \underline{c}$$

La renta per cápita aumenta por encima del nivel de subsistencia: $y_t > \underline{c}$.

- (b) ¿Qué predice el modelo sobre la evolución de la población?

Solución:

Dado que $y_t > \underline{c}$:

$$g_L = z(y_t - \underline{c}) > 0$$

La población comienza a crecer. Hay más recursos de los necesarios para la subsistencia, lo que permite sostener a más personas.

- (c) ¿Qué ocurre con la renta per cápita a medida que la población crece?

Solución:

A medida que L crece, la renta per cápita $y = A_1 L^{-\alpha}$ disminuye, ya que la productividad marginal del trabajo es decreciente. Con tierra fija y más trabajadores, cada persona dispone de menos recursos. La renta per cápita cae progresivamente hacia $\underline{c}$.

- (d) ¿Cuál es el nuevo estado estacionario?

Solución:

Dado que $g_A = 0$ (el nivel cambió, pero no la tasa de crecimiento), el nuevo estado estacionario requiere $g_y = 0$, lo que implica $g_L = 0$, y por tanto:

$$y^{SS} = \underline{c} \quad (\text{igual que antes del shock})$$

La población de estado estacionario cambia:

$$L_{\text{nuevo}}^{SS} = \left(\frac{A_1}{\underline{c}} \right)^{1/\alpha} > \left(\frac{A_0}{\underline{c}} \right)^{1/\alpha} = L_{\text{antiguo}}^{SS}$$

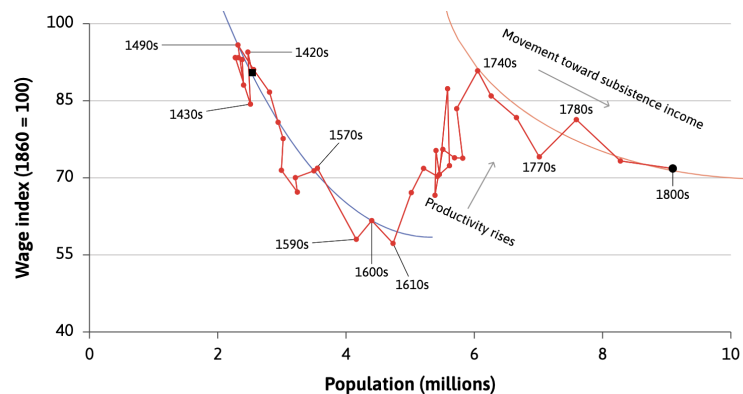
El bienestar **no ha mejorado permanentemente**: la economía vuelve al mismo nivel de renta de subsistencia $\underline{c}$, pero con una población mayor.

- (e) ¿Por qué se denomina “trampa malthusiana”?

Solución:

Es una “trampa” porque cualquier mejora tecnológica que eleve temporalmente el bienestar por encima de la subsistencia desencadena un crecimiento poblacional que erosiona completamente esa ganancia. La economía siempre retorna a $y^{SS} = \underline{c}$: la mejora tecnológica se traduce enteramente en más población, no en mayor bienestar. La sociedad está “atrapada” en el nivel de subsistencia, sin posibilidad de mejorar permanentemente su nivel de vida mediante avances tecnológicos puntuales (solo un crecimiento tecnológico sostenido $g_A > 0$ permite superar $\underline{c}$).

Ejercicio 4: Evidencia histórica — Inglaterra 1280–1800



Fuente: CORE

(a) Principales fases históricas.

Solución:

Se distinguen al menos cuatro fases:

1. **1280–1490:** La población cae drásticamente (de ~6 a ~3 millones, Peste Negra) y los salarios reales aumentan considerablemente.
2. **~1500–1610:** Los salarios elevados permiten un crecimiento de la población (de ~3 a ~5 millones).
3. **~1610–1740:** Aumento exógeno del nivel de tecnología. La población sigue creciendo y la economía sostener mayores salarios con la nueva tecnología.
4. **~1740–1800:** Continúa el crecimiento poblacional y el nivel de salario cae hasta el nuevo nivel de equilibrio.

(b) Período 1280–1490 (Peste Negra).

Solución:

La Peste Negra redujo drásticamente la población L . Según el modelo, $y_t = A_t L_t^{-\alpha}$: una caída de L con A constante implica un aumento de y_t . Al haber menos trabajadores compartiendo la misma tierra, cada uno dispone de más recursos, lo que se refleja en salarios reales más altos. Matemáticamente, $\partial y / \partial L < 0$, por lo que una reducción de L incrementa y .

(c) Período $\sim 1500-1610$.

Solución:

Con salarios altos ($y_t > \underline{c}$), el modelo predice $g_L = z(y_t - \underline{c}) > 0$: la población crece. Esto es exactamente lo que se observa en la figura. A medida que la población aumenta, los salarios comienzan a disminuir (más trabajadores compiten por la misma tierra, $y = AL^{-\alpha}$ cae). Esto es plenamente consistente con el mecanismo malthusiano: el bienestar por encima de la subsistencia genera crecimiento poblacional, que a su vez erosiona ese bienestar.

(d) ¿Es la economía inglesa pre-industrial consistente con la trampa malthusiana?

Solución:

Sí, es notablemente consistente. La figura muestra un patrón cíclico donde:

- Las caídas de población (por shocks exógenos como la peste) elevan los salarios.
- Los salarios altos inducen crecimiento poblacional.
- El crecimiento poblacional reduce los salarios de vuelta hacia el nivel de subsistencia.

Este es exactamente el mecanismo de la trampa malthusiana: la economía oscila en torno al equilibrio de subsistencia, con la relación inversa entre población y salarios como elemento central. La economía inglesa no escapó de esta dinámica hasta la Revolución Industrial (post-1800), cuando el crecimiento tecnológico sostenido ($g_A > 0$ de forma persistente) permitió superar la trampa.

Ejercicio 5: Política y crecimiento pre-industrial

$$y^{SS} = \frac{g_A}{\alpha z} + \underline{c}, \quad L^{SS} = \left(\frac{A}{y^{SS}} \right)^{1/\alpha}$$

Valores de referencia: $\alpha = 0.5$, $z = 0.02$, $\underline{c} = 1$, $g_A = 0.01$, $A = 10$.

(a) Valores de referencia.

Solución:

$$y^{SS} = \frac{0.01}{0.5 \times 0.02} + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$L^{SS} = \left(\frac{10}{2} \right)^{1/0.5} = 5^2 = 25$$

(b) Política A: z baja de 0.02 a 0.01.

Solución:

$$y_A^{SS} = \frac{0.01}{0.5 \times 0.01} + 1 = \frac{0.01}{0.005} + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$L_A^{SS} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} \approx 11.1$$

Sí, el bienestar mejora (y^{SS} sube de 2 a 3). La población cae de 25 a ≈ 11.1 : al reducir la sensibilidad demográfica, la economía soporta menos presión poblacional y alcanza un mayor nivel de renta per cápita.

(c) Política B: g_A sube de 0.01 a 0.02 (manteniendo $z = 0.02$).

Solución:

$$y_B^{SS} = \frac{0.02}{0.5 \times 0.02} + 1 = \frac{0.02}{0.01} + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$L_B^{SS} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} \approx 11.1$$

El bienestar también mejora a $y^{SS} = 3$. Al evaluar cuando $A = 10$, la población es la misma (≈ 11.1). Sin embargo, hay una diferencia clave en la dinámica: con Política B, la tasa de crecimiento poblacional de estado estacionario es $g_L = g_A/\alpha = 0.02/0.5 = 4\%$, frente al 2% de la Política A ($g_L = 0.01/0.5$). La población crece más rápido bajo Política B.

(d) Comparación.

Solución:

	Referencia	Política A	Política B
y^{SS}	2	3	3
L^{SS} (en $A = 10$)	25	11.1	11.1
g_L^{SS}	2%	2%	4%

Ambas consiguen el mismo aumento de PIBpc ($y^{SS} = 3$). La diferencia clave es la dinámica poblacional a largo plazo: la Política B genera un crecimiento poblacional el doble de rápido (4% vs. 2%).

La Política A (control de fertilidad) es más eficiente en el sentido de que mejora el bienestar sin acelerar el crecimiento poblacional. La Política B (innovación) también mejora el bienestar, pero requiere mantener un ritmo de innovación más alto de forma permanente para sostener el equilibrio. Si g_A cayera, la economía volvería a un y^{SS} menor. La recomendación depende del contexto, pero ambas son complementarias.

(e) ¿Qué ocurre si $g_A = 0$?

Solución:

Si $g_A = 0$:

$$y^{ss} = \frac{0}{\alpha z} + \underline{c} = \underline{c}$$

No es posible alcanzar un PIBpc superior al de subsistencia en el largo plazo. Toda mejora en el nivel de tecnología (A) se absorbe completamente por el crecimiento poblacional, y la economía retorna a $\underline{c}$. Esta es la esencia de la trampa malthusiana: sin crecimiento tecnológico sostenido, la economía está condenada a la subsistencia.