

HOJA DE PROBLEMAS 2

La Trampa Malthusiana

Crecimiento Económico

CUNEF

Ejercicio 1: Función de producción y productividad marginal

Considera una economía pre-industrial donde la producción de grano viene dada por:

$$Y_t = A_t L_t^{1-\alpha}$$

donde Y_t es la producción total, $A_t = B_t X^\alpha$ recoge la tecnología (B_t) y la tierra fija (X), L_t es el trabajo (población), y $\alpha \in (0, 1)$.

Supongamos que $A_t = 10$, $\alpha = 0.5$ y $L_t = 100$.

- (a) Calcula la Productividad Marginal del Trabajo (PMgL):

$$\text{PMgL} = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t}$$

Obtén la expresión general y evalúa numéricamente para los valores dados.

- (b) Demuestra que la PMgL es positiva ($\text{PMgL} > 0$) y decreciente ($\frac{\partial^2 Y_t}{\partial L_t^2} < 0$) para cualquier $L_t > 0$.
- (c) Define la renta per cápita como $y_t = Y_t/L_t$. Obtén la expresión de y_t en función de A_t , L_t y α .
- (d) Demuestra que la renta per cápita es decreciente en la población: $\frac{\partial y_t}{\partial L_t} < 0$. Calcula y_t para $L_t = 100$ y $L_t = 400$. ¿Qué ocurre con el bienestar cuando se cuadruplica la población?

Ejercicio 2: Dinámica poblacional y estado estacionario

En el modelo malthusiano, la tasa de crecimiento de la población depende de la diferencia entre la renta per cápita y un nivel de subsistencia $\underline{c}$:

$$g_L = z(y_t - \underline{c})$$

donde $z > 0$ es un parámetro de sensibilidad. Recordamos que la renta per cápita es $y_t = A_t L_t^{-\alpha}$ y que su tasa de crecimiento es:

$$g_y = g_A - \alpha g_L$$

donde g_A es la tasa de crecimiento de la tecnología.

Supongamos $\alpha = 0.5$, $z = 0.02$, $\underline{c} = 1$, y $g_A = 0.01$.

- (a) ¿Qué ocurre con la población si $y_t > \underline{c}$? ¿Y si $y_t < \underline{c}$? ¿Y si $y_t = \underline{c}$? Interpreta económicamente cada caso.
- (b) En el estado estacionario, $g_y = 0$. Usa esta condición junto con la ecuación de g_L para derivar la expresión del PIBpc de estado estacionario y^{SS} en función de g_A , α , z y $\underline{c}$.
- (c) Calcula y^{SS} con los valores numéricos dados. ¿Cuánto mayor es respecto al nivel de subsistencia?
- (d) Sabiendo que en el estado estacionario $y^{SS} = A(L^{SS})^{-\alpha}$, despeja y calcula la población de estado estacionario L^{SS} para $A = 10$.

Ejercicio 3: Shock tecnológico en el modelo malthusiano

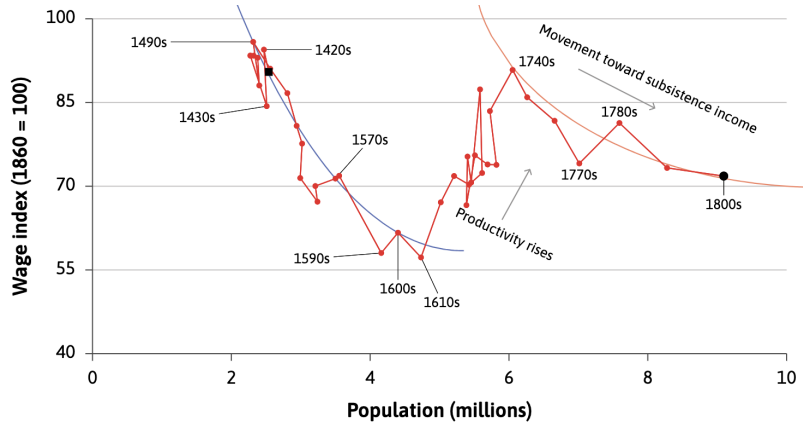
Considera la economía del Ejercicio 2 en estado estacionario con $g_A = 0$ (sin progreso tecnológico), de modo que $y^{SS} = \underline{c}$ y la población es constante.

En el momento $t = 0$ se produce una mejora tecnológica permanente que eleva el nivel de tecnología de A_0 a $A_1 > A_0$, pero la tasa de crecimiento tecnológico sigue siendo $g_A = 0$.

- (a) Inmediatamente tras el shock (antes de que la población se ajuste), ¿qué ocurre con la renta per cápita y_t ? ¿Es mayor, menor o igual que $\underline{c}$?
- (b) Dado que $y_t > \underline{c}$, ¿qué predice la ecuación $g_L = z(y_t - \underline{c})$ sobre la evolución de la población?
- (c) A medida que la población crece, ¿qué ocurre con la renta per cápita? Explica el mecanismo económico (relaciona con la productividad marginal decreciente).
- (d) ¿Cuál es el nuevo estado estacionario a largo plazo? Indica los valores de y^{SS} y compara L^{SS} antes y después del shock. ¿Ha mejorado permanentemente el bienestar de la población?
- (e) Explica por qué este mecanismo se denomina “trampa malthusiana”.

Ejercicio 4: Evidencia histórica — Inglaterra 1280–1800

La siguiente figura muestra la evolución conjunta de los salarios reales (eje vertical) y la población (eje horizontal) en Inglaterra entre 1280 y 1800.



Fuente: CORE

Recuerda que en el modelo malthusiano:

- La renta per cápita depende negativamente de la población: $y_t = A_t L_t^{-\alpha}$
 - La población crece cuando $y_t > \underline{c}$ y decrece cuando $y_t < \underline{c}$
- (a) Identifica las principales fases históricas que se observan en la figura (al menos cuatro períodos diferenciados).
 - (b) El período 1280–1490 incluye la Peste Negra (siglo XIV), que redujo drásticamente la población. Usando las ecuaciones del modelo, explica por qué los salarios reales aumentaron durante este período.
 - (c) En el período posterior (aproximadamente 1500–1610), ¿qué ocurrió con la población y los salarios? ¿Es consistente con la predicción del modelo malthusiano? Explica el mecanismo.
 - (d) A la vista de la figura completa, ¿dirías que la economía inglesa pre-industrial se comporta de forma consistente con la trampa malthusiana? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 5: Política y crecimiento pre-industrial

En el modelo malthusiano, el PIBpc de estado estacionario y la población de estado estacionario vienen dados por:

$$y^{SS} = \frac{g_A}{\alpha z} + \underline{c}, \quad L^{SS} = \left(\frac{A}{y^{SS}} \right)^{1/\alpha}$$

Un gobierno pre-industrial se plantea dos políticas para mejorar el bienestar de largo plazo:

- **Política A:** Control de la fertilidad, que reduce el parámetro de sensibilidad z .
- **Política B:** Fomento de la innovación, que aumenta la tasa de crecimiento tecnológico g_A .

Usa los valores de referencia: $\alpha = 0.5$, $z = 0.02$, $\underline{c} = 1$, $g_A = 0.01$, $A = 10$.

- (a) Calcula y^{SS} y L^{SS} con los valores de referencia.

- (b) **Política A:** Supón que z se reduce de 0.02 a 0.01. Calcula los nuevos y^{SS} y L^{SS} . ¿Mejora el bienestar? ¿Qué ocurre con la población?
- (c) **Política B:** Supón que g_A aumenta de 0.01 a 0.02 (manteniendo $z = 0.02$). Calcula los nuevos y^{SS} y L^{SS} . ¿Mejora el bienestar? ¿Qué ocurre con la población?
- (d) Compara ambas políticas. ¿Cuál consigue un mayor aumento del PIBpc de estado estacionario? ¿Cuál genera un mayor crecimiento de la población? ¿Qué política recomendarías y por qué?
- (e) ¿Qué ocurriría si $g_A = 0$? ¿Es posible alcanzar un PIBpc superior al de subsistencia en el largo plazo? Relaciona tu respuesta con la trampa malthusiana.